

د. عبد العظيم أنيس

مقدمة
فى
علم الرياضيات



دار المستقبل العربى

تقديم

يستمد هذا الكتاب مادته الاساسية من سلسلة المحاضرات التي كلفت منذ سنوات بإلقائها عن «تاريخ الرياضيات» على طلبة الدبلوم المهني بكلية التربية جامعة عين شمس، وهم جميعا من خريجي أقسام الرياضيات بكليات التربية أو كلية البنات ويعملون بمهنة التدريس بالتعليم العام صباحا، ويحضرون محاضرات هذا الدبلوم في المساء.

وهي تناول بإيجاز هذا التاريخ في العصور والحضارات المختلفة بدءا من الحضارة البابلية والفرعونية حتى القرن العشرين، مروراً بالحضارة اليونانية والحضارة العربية الاسلامية ثم أوروبا في عصر النهضة وصولاً إلى المرحلة الحديثة، وقد اعتمدت في تناول هذا التاريخ أحيانا على بحث طبيعة المرحلة، وبالتركيز على الحديث عن بعض الشخصيات التي عبرت في إنجازاتها عن المرحلة، أحيانا أخرى، مثل نيوتن في عصر النهضة في أوروبا، وجاوس في أواخر القرن الثامن عشر حتى منتصف القرن التاسع عشر، ومثل بوانكاريه في القرن العشرين. على أنه من الطبيعي في مثل هذا الكتاب المدرسي ألا يحيط بكل جوانب هذا التاريخ الواسع.

وقد اعتمدت في إعداد هذه المحاضرات على عدد من المراجع الاساسية الحديثة في مقدمتها كتاب «الخبرة الرياضية» للاستاذين الأمريكيين فيليب دافيز، وروبن هيرش، وكتاب «وقائع في رياضيات إسلام العصور الوسطى» للاستاذ الكندي برجرن، كما اعتمدت على بعض المراجع الغربية القديمة مثل كتاب «رجال الرياضيات» بجزئييه للاستاذ بل، وكتاب «الرياضيون العظام» للاستاذ تيرنبول.

كما استفدت كثيرا من كتاب الدكتور رشدى راشد الاستاذ بجامعة باريس، والذي صدر منذ سنوات بالفرنسية وصدرت طبعته العربية فى بيروت حديثا تحت عنوان «تاريخ الرياضيات العربية، بين الجبر والحساب».

كما استفدت أيضا من مقالات ظهرت فى العديد من المجالات العلمية البريطانية حول بعض قضايا تاريخ الرياضيات، ومن شبكة «الانترنت» للحصول على عدد من التقارير الهامة الصادرة عن مراكز البحوث الجامعية المنشغلة بقضايا تاريخ الرياضيات.

وأملئ أن يكون الكتاب نافعا لطلاب الجامعة وأن أكون قد قدمت جهدا مفيدا ينفع الباحثين فى قضايا التراث العلمى.

د. عبد العظيم أنيس

مارس ١٩٩٧

(١)

(مقدمة)

إذا تأملنا طويلا في البحث عن تعريف محكم للرياضيات فلن نجد حتى اليوم حلا شافيا لهذه المسألة ففي الماضي كانت الرياضيات تعرف بأنها علم دراسة المقادير (الكميات) المختلفة وعلاقاتها ببعضها البعض . إن هذا التعريف أو شئ مشابه له هو ما إعتمده علماء الرياضيات في الحضارة العربية الإسلامية . منذ القرن التاسع عشر الميلادي والعاشر والحادي عشر مرورا بالخوارزمي والخيام وابن الهيثم ... إلخ حتى الكاشي في القرن الخامس عشر الميلادي . في ذلك الزمان كان الإهتمام الأساسي بخواص هندسة إقليدس وحل معادلات الدرجة الأولى والثانية جبريا وبيانيا ، ثم حل معادلات الدرجة الثالثة بيانيا (الخيام بإستخدام تقاطع القطاعات المخروطية) ثم حل مشاكل حساب المثلثات لعلاقتها بالفلك ، وإيجاد قيم الجذور التربيعية والتكعيبية والجذر الرابع والخامس للأعداد ... إلخ . وحتى عصر النهضة في أوروبا الذي ورث إنجازات الحضارة العربية الإسلامية بدا هذا التعريف قبولا.

ثم جاء إكتشاف موضوع الزمر Groups في القرن التاسع عشر (وهي الدراسة المجردة للتماثل) ثم إكتشاف فرع الرياضيات

المعروف باسم Topology، وهي فروع لا كمية فأصبح التعريف السابق غير ملائم .

وخلال القرن العشرين ظهر تعريف أوسع للرياضيات أساسه أن الرياضيات مهتمة بدراسة الأنماط Patterns والأنظمة Orders . ولفترة طويلة بدا هذا التعريف أوسع وأكثر ملائمة، وقادرا على الإحاطة بفروع الرياضيات المختلفة المجردة خصوصا ولكن في العشرين سنة الأخيرة ظهر فرع رياضى جديد يدعى " عدم الإنتظام " Chaos ، وهو ينشغل بالسلوك شبه العشوائى لبعض الظواهر وتفسيره رياضيا . ولهذا الفرع الرياضى الجديد تطبيقات هامة فى علم الأرصاد وعلوم الحياة وفروع الطب (أبحاث القلب خصوصا) وأساسه ان العالم الذى نعيش فيه غير خطى Non-linear ، وأن محاولات دراسة الظواهر الطبيعية بمعادلات خطية سواء أكانت تفاضلية أو خلافه ليست إلا تقريبا فجا ، ولا تبرير له إلا سهولة الحصول على حلول فى صورة مغلقة Closed form ، بينما يصعب الحصول على مثل هذه الحلول فى حالة المعادلات غير الخطية ولا حل لها إلا بالحساب . وحيث أن الحاسب الآلى لم يكن موجودا آنذاك فقد فضل الرياضيون الابتعاد عن المعادلات غير الخطية .

أما اليوم حيث تتوفر الحواسب الآلية ذات السرعات الفائقة فقد كان من الطبيعى العودة إلى البحث فى حلول المعادلات غير الخطية بإستخدام الحواسب الآلية . ومن خلالها إكتشف أن العديد

من المتغيرات الطبيعية تتصرف فى لحظات معينة بشكل شاذ ، كالحشة التى قصمت ظهر البعير كما يقول المثل العربى القديم ، أو كما يقول المعاصرون فى الغرب "تأثير الفراشة" The Butterfly Effect ، وبمقتضاه يمكن لفراشة ترف بجناحيها فى الصين أن تؤدى إلى حدوث إعصار على سواحل أمريكا الغربية .

هناك إذن مشكل لم يحل تماما حول تعريف علم الرياضيات، اللهم إذا قلنا ما قاله يوتراندرسل ساخرا عندما عرف الرياضيات بأنها ما يصنعه الرياضيون .

Mathematics is what mathematicians do !

ويمكن أن نقول ونحن مطمئنون أن الرياضيات تتطور باستمرار فى اتجاهات مختلفة وفق إحتياجات التطبيقات المختلفة المحتملة . ومن المرجح أن كل تطور علمى هام فى الرياضيات سوف يحتاج إلى إطار نظرى جديد . وإذا لم تقدم الرياضيات القائمة اللغة الصحيحة فلا بد من إبتكار هذه اللغة ، وهى بدورها لابد أن تكون ذات صلات كافية بما هو قائم فعلا .

كثيرا ما تقدم الرياضيات كعلم نشأ فى برج عاجى لا صلة له بالحياة العملية وبالنشاط الإنتاجى للإنسان ، على أن هذه النظرة للرياضيات زائفة ولا يدعمها تاريخ الرياضيات ومن المؤكد أن دراسة تاريخ العلوم والحضارة يوضح أن ازدهار الحضارات إرتبط به ازدهار العلوم الرياضية وعندما ندرس الحضارة الفرعونية أو البابلية ، وننظر إلى

أحوال المعابد سوف نجد أنه إستحال على الكهنة الإعتماد على ذاكرتهم فى تسجيل أعداد الداخلين من الناس أو أعداد الماشية الموهوبه إلى المعبد . ومن هنا نشأت الحاجة إلى التسجيل ، مما أدى إلى تعود الإنسان على فكرة العِد . ومن هنا أيضا نشأت إرهافات الكتابة . وفى البدء كانت علامات على عصي ، ثم إشارات على ألواح الطين ، وشيئا فشيئا أصبح لكل عدد رمزا خاصا وتطور الحال إلى ظهور الكتابة ورموز الإعداد .

وهكذا أيضا نشأت الكسور من خلال حاجة الإنسان إلى القياس (الأطوال والأوزان) ونشأت الهندسة من خلال حاجة الإنسان إلى مسح الأرض لأغراض الزراعة ومن خلال التطلع إلى النجوم والكواكب فى السماء ، وتطور الحساب من خلال إحتياجات التجارة والبناء حتى وصل الإنسان إلى إستخدام المعداد فى العمليات الحسابية . وأمكن للهنود أن يكتشفوا فكرة الصفر وإن لم ينتشر إستخدامه إلا على يد العرب فى العصر العباسى الأول ويعتبر هذا الإكتشاف نقطة تحول خطيرة فى تاريخ علم الحساب ، كما قال لابلاس لنابليون ، إذ به أمكن التعبير عن أى عدد بعشرة أرقام فقط وأصبح من الممكن إجراء أى عملية حسابية على الورق ودون حاجة إلى المعداد .

وبابتكار الصفر وظهور رمزية بسيطة للأعداد والمقادير
(س، ص، أ، ب.. إلخ) أمكن حل مشكلات تؤول فى حلها إلى معادلة ،
وهكذا تمهد الطريق لظهور علم الجبر

✓ ولقد شهد العصر الحديث تقدما مذهلا للرياضيات فى أوربا
وأمرىكا بالدرجة الأولى ، خصوصا خلال المائة سنة الأخيرة .
فإكتشافات المائة سنة الأخيرة تفوق فى أهميتها ما تحقق خلال آلاف
السنين التى سبقتها ، والفضل فى ذلك يعود إلى الحضارة الصناعية
الحديثة بل حتى الحروب أدت إلى نشوء فروع من الرياضيات كان
من الصعب ظهورها لولا هذه الحروب ، ومن أمثلة ذلك نظرية
الألعاب Theory of games ، وبحوث العمليات ... إلخ .

وقد تتسع المسافة الزمنية بين إكتشاف رياضى وبين
إستخدامه فى التطبيقات ، لكن التاريخ يوضح انه حتى الأبحاث
الرياضية التى بدت مجردة وبلا فائدة عند ظهورها وجدت فرصة
تطبيقها بعد ذلك بسنين طويلة : فالقطع الناقص مثلا عندما إكتشفه
الرياضيون فى الحضارة اليونانية القديمة بدأ بلا نفع حتى أن أحد
تلاميذ إقليدس فى مدرسة الإسكندرية سأله عندما كان يدرس القطع
الناقص : وما فائدة كل هذا ؟ فالتفت إقليدس إلى الخادم الذى يقف
بجواره وقال غاضبا : يا غلام إعطه درهما . لكن القطع الناقص
إكتسب أهمية فريدة بعد ذلك أكثر من ألف عام على يد نيوتن

وآخرين عندما قدموا تفسيراً مقنعاً لحركة الأجسام السماوية في مسار قطع ناقص .

ومن الأمثلة التاريخية أيضاً الجذر التربيعي للعدد - ١ ، ونرمز له بالرمز i ، وهو يرجع في أصله إلى بحوث معادلات الدرجة الثانية. وإلا أن i اكتسب إحتراماً رياضياً على يد جاوس على الرغم من إعترافه بأن " الميتافيزيقا الحقيقية للعدد i تبدو مراوغة " لكن هكذا تم تعريف الإعداد المركبة التي تطورت إلى نظرية الدوال المركبة ، والتي بدت في فترة من الفترات أنها بلا فائدة ثم تأكد نفعها من دورها الأساسي في ميكانيكا الكم .

ولقد نشأ علم الإحتمال على يد فرمات وباسكال في القرن السابع عشر من خلال المشاكل التي طرحتها مراهنات الفرسان على ألعاب وأوراق الكوتشينة ، لكن التطبيقات الأهم في علوم الإتصالات وجودة الإنتاج والتأمين على الحياة ... إلخ . لم تبدأ إلا بعد ذلك بقرن ونصف . ونفس الشيء يمكن أن يقال عن موضوع الكسريات Fractals الذي نشأ على يد الألماني هاوس دورف Housdroff والفرنسي جوليا في أوائل القرن العشرين . ولزمن طويل بدأ البحث مجرداً في هذا الموضوع وبلا تطبيق . لكن حديثاً جداً امكن إستخدام هذه النتائج في بحوث الجغرافيا وعلوم الحياة بنجاح .

من أين إذن نشأت هذه النظرة الزائفة إلى الرياضيات ؟

يمكن القول أن هناك ظروفًا خاصة وطابعًا خاصًا للرياضيات ساعد على ترويج هذه النظرة . وفي مقدمتها

(أ) التجريد كصفة أساسية في العلم الرياضي ، ونعني بالتجريد هنا أننا عندما نبحث عن المجهول في معادلة الدرجة الثانية لا يهمنا أن نعرف إن كان هذا المجهول هو إنسان أو عمر إنسان أو فاكهة أو حيوانا أو جمادا .

وهذا التجريد في المعالجة يغري بقبول تلك النظرة التي تتوهم أن الرياضيات لم تنشأ من خلال النشاط الحضاري للإنسان .

(ب) وجود مسافة زمنية في العادة بين الإكتشاف الرياضي وبين تطبيقات في الحياة . ولقد أشرنا إلى مثال القطع الناقص ، وإلى مثال الكسريات ، ويمكن أن نعطي أمثلة عديدة أخرى . وهذا الفاصل الزمني بين العديد من الإكتشافات الرياضية وبين تطبيقاتها ساعد دون شك على مابدا أحيانا من أن بعض الإكتشافات الرياضية لا فائدة منها ، وبالتالي لا علاقة لها بالحياة .

(ج) وقد تعود هذه النظرية الزائفة إلى حقيقة أن الحضارات القديمة (الفرعونية والبابلية) وهي الأصل في نشأة

الرياضيات لم تمنحنا حتى اليوم وثائق كافية لشرح الفكر الرياضى النظرى القائم آنذاك وصلته بواقع الحياة .

(د) وأخيرا فإن ميراث البشرية الأساسى فى الرياضيات هو ميراث الحضارة اليونانية وصل إلى الغرب مترجما عن الحضارة العربية الإسلامية.

والمجتمع اليونانى القديم مجتمع ذو طابع خاص يعتبر نموذجا لما يسمى بالمجتمع العبودى به سادة وعبيد .

والعبيد فى هذا المجتمع يشتغلون بالحرف والإنتاج والزراعة ، بينما السادة يشتغلون بالتفكير والتأمل ، وإلى هؤلاء السادة يعود فضل التراث اليونانى فى الرياضيات ، ونذكر هنا على وجه التحديد مدرسة فيثاغورس التى كانت مدرسة رياضية نصف صوفية تأملية ، وحتى عندما أنشأ افلاطون الأكاديمية التى كان يتولى التدريس فيها حرص على أن يكتب على بابها " لا يدخلها إلا المشتغلون بالهندسة " ، ولقد تولى بعد ذلك إقليدس التدريس فى مدرسة الإسكندرية وفيها أنشأ كتابه المشهور " الأصول " The elements والذى ظل يدرس كما هو تقريبا فى المدارس حتى القرن العشرين ويعتبر ارشميدس ليس واحدا ن أعظم رياضى الحضارة اليونانية فحسب ، إلا أنه يعتبر واحدا من ثلاثة رياضيين يجلسون وحدهم على القمة فى

تاريخ البشرية وهم : أرشميدس ، نيوتن ، جاوسل . ولقد كان
أرشميدس من السادة يعمل فى بلاط ، الملك ، إليه تنسب
القصة المشهورة عندما كلفه الملك أن يبحث مسألة الكثافة
النوعية للذهب والفضة ، وقيل أنه إكتشف الحل وهو فى
الحمام فخرج عاريا وهو يصيح : وجدتھا وجدتھا .

ولقد تميزت أعمال هؤلاء السادة وكتاباتهم بإحتقار
العمل اليدوى والإعلاء من شأن التأمل حتى ان أفلاطون
كان يقول عن رواد الألعاب الأوليمبية بانهم ثلاثة أنواع .
فهناك اللاعبون والباعة والنظارة ، وهؤلاء الأخيرون فى رأيه
أرقى الثلاثة لأنهم يتأملون !

✓ لماذا نهتم بتدريس تاريخ الرياضيات ؟

(أ) الإهتمام بموضوع تاريخ الرياضيات هو إهتمام بنمو الفكر
الإنسانى ونزعتھ إلى الدقة وإكتشاف قواعد موضوعية يستند
إليها الإنسان فى إثبات صحة ما يقوم به .

(ب) لأن دراسة تاريخ الرياضيات تعطى الدارس فرصة تفھم
الأسباب وراء كثير من الإجرائيات وطرق العمل التى نقوم
بھا عند إجراء عملية رياضية . وقد يوفر هذا وقتا طويلا
بتجنب محاولات سبق لمن سبقونا محاولتها ولم تنجح . أى

أن دراسة تاريخ الرياضيات قد تكون عاملاً هاماً في رفع كفاءة البحث الرياضى .

(ج) وبالنسبة للمعلم تمده الدراسة التاريخية للرياضيات بثروة من المعلومات والقصص الطريفة والطرق المختصرة التى تفيده عند التدريس وتجعل مادته جذابة للتلاميذ .

(د) أهمية تكوين الحس التاريخى عند الرياضى ، فبالإضافة إلى التعريف بجوانب مجهولة عن الرياضيات يمكن من خلال الدراسة التاريخية إكتشاف إستخدامات مختلفة للرياضيات كانت مستعملة قديماً وإن تكن مجهولة اليوم .

(و) ثم أخيراً ينبغى أن ندرس تاريخ الرياضيات حتى نعرف - كعرب - أمجادنا العلمية القديمة أى أمجاد الحضارة العربية الإسلامية وإنجازاتها فى الرياضيات من القرن التاسع حتى القرن الخامس عشر الميلادى على وجه الخصوص ، فى بغداد والقاهرة ودمشق والأندلس .

وفى الماضى كانت هناك النظرة القديمة للمستشرقين الأوربيين ، وقد دامت طوال القرن التاسع عشر ومعظم العشرين ، وهى النظرة المركزية الأوربية والتى إدعت أن العرب - بإستثناءات قليلة - كانوا ناقلين للعلم اليونانى فحسب ، ولم يجددوا فيه شيئاً ولم يضيفوا إليه شيئاً ، بإستثناء ابن الهيثم وكتابه فى البصريات (المناظر) .

ولكن على ضوء الإكتشافات الحديثه لوثائق عديدة
تغيرت هذه النظرة عند العديد من الأكاديميين الأوروبيين
والأمريكيين ، وبدأوا فى الإعتراف بالإنجازات الإبداعية
للحضارة العربية الإسلامية . فهناك نصير الدين الطوسى
(القرن الثالث عشر) أول من درس مسلمة إقليدس الخامسة
(مسلمة التوازى) بهدف إشتقاقها من المسلمات الأربع الأولى
وهذه الدراسة أدت بزخارى فى القرن السابع عشر إلى بدء
عملية الهندسة الأقليدية (وقد ثبت أن زخارى كان على
معرفة بكتابات الطوسى) وهناك ترجمة جون واليس للبحوث
العربية الرياضية وإستخدامه لها فى محاضرة فى جامعة
إكسفورد (القرن ١٧) وهناك جابر بن أفلح (الأندلس)
وإنتقاده لآراء بطليموس فى الفلك ، وقد ثبت أن
كوبرنيكس وكبلر كانا على علم بكتابات ابن أفلح الذى كان
متأثرا بفكرة دوران الأرض حول الشمس وهناك إنجازات
إبن الهيثم فى البصريات وهى إكتشافات يعترف الآن فى
أوربا بأنها كانت ذات أثر كبير على فكرة المنظور وتطور فن
الرسم الأوروبى وهناك الخيام وإبتكاراته فى حلول معادلات
الدرجة الثالثة بيانيا بإستخدام تقاطع قطاعات مخروطية ...
إلخ .

ودراسة كل هذه الإنجازات تشعرنا أننا تفوقنا على العالم
في فترة من الفترات وأنا قادرون بالجهد المتصل على أن
نكون مبتكرين في العالم المعاصر ولا نكتفى بنقل إنجازات
الحضارة الغربية .

(٢)

(إطلالة عامة)

بعض قضايا نظرية الأعداد : تعتبر نظرية الأعداد أبسط فروع الرياضيات من زاوية أنها تتعلق أساسا بالخواص الحسابية للأعداد الصحيحة ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ... إلخ وعلى ذلك فهي أصعب فروع الرياضيات في براهينها المعقدة ، وبعض هذه المشاكل مازالت حتى اليوم بدون حل .

ومن بين الموضوعات المتقدمة في نظرية الأعداد سوف نختار ثلاث قضايا لها أهمية خاصة

(أ) نظرية التجزيئات Theory of partitions

(ب) نظرية فرمات الأخيرة Fermat's last theorem

(ج) نظرية جاوس عن الأعداد الأولية .

وتتعلق نظرية التجزيئات (التقاسيم) بعدد الطرق التي يمكن بها تجزئ العدد الصحيح إلى أعداد صحيحة أصغر . مثلا العدد ٣ إذا أخذنا التقسيم الصفري null partition يمكن تقسيمه إلى ٢ أو ١ + ١ والعدد ٣ يمكن تقسيمه إلى ٣ ، ٢ + ١ ، ١ + ١ + ١ أي ثلاثة تقسيمات ، والعدد ٤ يمكن تجزئته إلى ٤ ، ٣ + ١ ، ٢ + ٢ ، ٢ + ١ + ١ ، ١ + ١ + ١ + ١ أي خمسة أجزاء .

إن عدد طرق تقسيم عدد صحيح إلى أعداد أبسط ليس أمراً بسيطاً ، (حاول مثلاً بحث عدد أقسام العدد ١٠ وتحقق من أنها ٤٢ تجزئ) ، ولقد بدأ الإهتمام بهذا الموضوع منذ القرن السابع عشرن والسؤال الهام هو هل هناك طريقة منتظمة للحصول على إجابات لأي عدد ؟

ولقد كانت للإجابة على هذا السؤال محل إهتمام كبير فى أوائل القرن العشرين خصوصاً على يد الرياضى الهندى رامانوجان والإنجليزى هاردى ، ووصلا إلى نتائج نذكر بعضها هنا . نفرض ان ت (ن) هو عدد تجزيئات العدد الصحيح ن ، مثلات (٤) = ٥ .

لقد أمكن إثبات أن

$$\frac{1}{(1-s)(1-s^2)(1-s^3)\dots} = \sum_{n=0}^{\infty} T(n) s^n$$

كذلك أثبت رامانوجان من بين ما اثبت ان

$$T(4) + T(9) + T(14) + T(19) + \dots$$

$$\frac{\{ \dots (1-s^{10})(1-s^{15})(1-s^{20}) \dots \}}{\{ \dots (1-s^3)(1-s^6)(1-s^9) \dots \}} =$$

والغريب أن بعض هذه النتائج التى أنتشرت أوائل القرن العشرين قد

وجدت مؤخرا تطبيقات هامة لها على يد الفيزيائي باكستر Baxter في علم الميكانيكا الإحصائية .

والآن ننتقل إلى نظرية فرمات الأخيرة لقد سميت بهذا الاسم لأنه وجد على هامش نسخة من كتاب ديوفانتيس في الجبر كتابه لفرمات قبل موته مباشرة يقول فيها إنه عثر على برهان لهذه النظرية ولكن نظرا لضيق الهامش لا يستطيع كتابة البرهان ولهذا سميت هذه النظرية " نظرية فرمات الأخيرة " ومنذ زمن فرمات يحاول الرياضيون دون جدوى البحث عن برهان لهذه النظرية ، وإن كان أحد الرياضيين الإنجليز من أساتذة جامعة برنستون قد أعلن العام الماضي أنه عثر على حل لهذه النظرية يقع في ألف صفحة .

والنظرية تتعلق بالسؤال التالي : هل هناك حل صحيح (أى أعداد صحيحة) للمعادلة.

$$س^ن + ص^ن = ع^ن \quad \text{ن عدد صحيح}$$

في حالة $ن = ٢$ نعرف أن هناك حل وفق نظرية فيثاغورس ، بل هناك عدد لا نهائي من الحلول الصحيحة لقيم $س$ ، $ص$ ، $ع$ في حالة $ن = ٢$. ويمكن أن نبدأ بإختيار $س$ عدد فردى فتربيعه ثم طرح واحد من هذا المربع وقسمة الناتج على ٢ نحصل على $ص$. وبإضافة ١ إلى $ص$ نحصل على $ع$. مثلاً إذا أخذنا $س = ٥$ بالتربيع نحصل على

٢٥ ويطرح واحد نحصل على ٢٤ وبالقسمة على ٢ نحصل على ١٢ .
وهذا هو ص وبإضافة ١ إلى ١٢ نحصل على ١٣ وهذا هو ع ، أى أن

$${}^2_{13} = {}^2_{12} + {}^2_5$$

بوجه عام فإن المتطابقة فى حالة $س = م^2 + ١$ (فردى) هى

$${}^2_{[١+(١+م)م^2]} = {}^2_{[(١+م)م^2]} + {}^2_{(١+م^2)}$$

أما إذا كانت س عددا زوجيا ٨ مثلا فنقسم أولا على ٢ نحصل على ٤ ،
ثم نربع لنحصل على ١٦ ونطرح فقط واحد نحصل على ١٥ وهذا هو
ص ، وبإضافة ٢ إلى قيمة ص نحصل على ع وهو ١٧ أى أن

$${}^2_{17} = {}^2_{15} + {}^2_8$$

وبشكل عام فإن المتطابقة هى

$$(١ + {}^2_م) = {}^2_{(١-م)} + {}^2_{(م^2)}$$

والسؤال الذى طرحته نظرية فرمات هو : إذا كانت $ن < ٢$ مثلا ٣ ، ٤ ،
٥ فهل هناك قيم صحيحة لـ س ، ص ، ع تحقق المعادلة .

$$(١) \quad س^ن + ص^ن = ع^ن \quad ن < ٢$$

إن نص نظرية فرمات الأخيرة يقول أنه لا يوجد حل للمعادلة (١) في حالة $n < 2$ خذ مثلاً حالة $n = 3$. فهل يمكن تقسيم مكعب كامل إلى مجموع مكعبين كاملين ؟

لم يعثر أحد على حالة واحدة من هذا النوع ولكن هل يوجد برهان ؟

لقد إنكبت عشرات من الرياضيين منذ القرن السابع عشر حتى العام الماضي على محاولة الوصول إلى برهان عام لنظرية فرمات الأخيرة ولم ينجحوا ، لقد أمكن برهان النظرية في حالة $n = 3, 4, 5, \dots$ إلخ وأما البرهان العام فلم يعثر أحد عليه حتى أعلن في العام الماضي عن برهان في جامعة برنستون يقع في ألف صفحة .

(٢) والآن نعود إلى الموضوع الثالث لهذا القسم ، الأعداد الأولية :
لقد جذب هذا الموضوع إهتماماً فائقاً من الرياضيين ، لأنه يرتبط ببعض أشهر مسائل التحليل الرياضي . ومع ذلك فلا زالت بعض جوانبه التي تبدو بسيطة دون برهان .
والأعداد الأولية هي التي لا يمكن تحليلها لأبسط منها ، وهي كلها فردية باستثناء العدد ٢ وإليك قائمة ببعض الأعداد الأولية :

٢٩	٢٣	١٩	١٧	١٣	١١	٧	٥	٣	٢
٧١	٦٧	٦١	٥٩	٥٣	٤٧	٤٣	٤١	٣٧	٣١
١١٣	١٠٩	١٠٧	١٠٣	١٠١	٩٧	٨٩	٨٣	٧٩	٧٣

وهذه القائمة بلا نهاية ، أى أن هناك عددا لا نهائيا من الأعداد الأولية . لقد برهن إقليدس ذلك وإليك البرهان :

نفرض ان هناك نهاية ك للأعداد الأولية ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ... ك.

والآن إعتبر العدد الصحيح $N = ٢ \times ٣ \times ٥ \times ٧ \times \dots \times K + ١$

واضح أن العدد ن أكبر من ك . وإذا قسمنا ن على ٢ نحصل على $٢ \times ٣ \times ٥ \times ٧ \dots K$ والباقي ١ بالمثل إذا قسمنا ن على ٣ نحصل على $٢ \times ٣ \times ٥ \times ٧ \dots K$ له والباقي ١ وهكذا ... إلخ .

والآن العدد ن إما أن يكون أوليا أو لا يكون . فإذا كان أوليا فهو أكبر من ك وهذا يناقض الفرض . وإذا كان غير أولى فيمكن تحليله إلى أعداد أولية . ولكن لايمكن أن يكون أحد عوامله العدد ٢ أو ٣ ، ٥ ... أوك كما رأينا لوجود باق

وعلى هذا فهناك عدد أولى أكبر من ك

الخاصة الثانية التى تلفت النظر فى الأعداد الأولية هى عدم وجود نسق ملحوظ فى هذه الأعداد . فالأعداد الأولية الأقل من ١٠ هى ٤

والأعداد الأولية الأقل من ١٠٠ هي ٢٥ والأعداد الأولية الأقل من ألف هي ١٦٨ .

وقد اوضحت حسابات الحاسب الالى مثلا أن هناك تسعة أعداد أولية بين العدد ١٠٠٠٠٠٠٠٠ و ١٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠ وبين الأعداد المائة الأقل منه مباشرة ، بينما هناك عددان أوليان فقط بين العشرة مليون والأعداد المائة الأكبر منه مباشرة .

أما ما هو مبرهن وغير برهن (وإن كان محل حدس) عن الأعداد الأولية فيمكن ان يملأ كتابا . مثلا إن أكبر عدد أولى معروف حتى اليوم هو $2^{1201} - 1$

من المبرهن أيضا ان أى عدد أولى على صورة $m + 1$ (م عدد صحيح) هو مجموع مربعين صحيحين

$13 = 4 + 9$ ، $37 = 1 + 36$ ، $629 = 100 + 529$ وهكذا) معروف أيضا ومبرهن انه بين كل عدد صحيح ن ، ٢ أن هناك عدد أولى $n < 1$ ولكن هل هناك عدد أولى بين ن ^٢ ، (ن + ١) ^٢ لجميع ن < .

ليس هناك حتى اليوم برهان على ذلك .

هل كل عدد زوجى هو مجموع عددين أوليين ؟ هذا ما يعرف بإسم دعوى جولدباخ Goldbach conjecture ($8 = 3 + 5$ ، ١٢ ، $5 + 7 =$ وهكذا ..) . حتى اليوم لا يوجد برهان على ذلك هل هناك عدد لا نهائى من الأزواج الأولية prime pairs مثل

(٥، ٣)، (١١، ١٣)، (١٧، ١٩)، (٢٩، ٣١) ...

حيث الفارق بين عنصرى الزوج هو ٢

لا أحد حتى اليوم قد برهن على ذلك على الرغم من أن معظم الرياضيين مقتنعون بأن الإجابة بنعم

على أن بعض الإنتظام يتضح فى موضوع الأعداد الأولية إذا نظرنا إليها كمجتمع نبدأ أولا بعمل جدول كبير من الأعداد الأولية ، وقد أصبح هذا سهلا بفضل الحاسب الآلى . ولنفرض أن $E(n)$ هى عدد الأعداد الأولية الأقل من أو تساوى n مثلا إذا كان $n = 10$ فإن $E(10) = 4$ ، وإذا كانت $n = 100$ فإن $E(100) = 25$ وهكذا . والآن لنأمل الجدول التالى الذى هو نتيجة الحساب على الحاسب الآلى .

الفروق الأولى	$\frac{ن}{ع(ن)}$	ع(ن)	ن
	٢,٥	٤	١٠
١,٥	٤	٢٥	٢ ١٠
٢	٦	١٦٨	٢ ١٠
٢,١	٨,١	١٢٢٩	٤ ١٠
٢,٣	١٠,٣	٩٥٩٢	٥ ١٠
٢,٣	١٢,٧	٧٨٤٩٨	٦ ١٠
٢,٣	١٥	٦٦٤٥٧٩	٧ ١٠
٢,٤	١٧,٤	٥٧٦١٤٥٥	٨ ١٠
٢,٣	١٩,٧	٥٠٨٤٧٥٣٤	٩ ١٠
٢,٣	٢٢	٤٥٥٠٥٢٥١٢	١٠ ١٠

وواضح من الجدول أنه كلما زادت قوة العشرة إلى القيمة إلى التي تليها

فإن النسبة $\frac{N}{E(N)}$ تزيد بمقدار 2^3 تقريبا وإذا إنتبهنا إلى أن H_{10} هي

2^3 فإن من الممكن أن نصل إلى النتيجة التالية

$$\frac{N}{E(N)} \sim H_N \quad \text{كلما زادت } N$$

إن إكتشاف هذه النظرية يعود إلى جاوس وكان عمره ١٥ سنة ولم

يستطع بالطبع تقديم برهان عليها ، وقد قام بذلك بعد أكثر من مائة عام

الرياضى الفرنسى هادامار (عام ١٨٩٦)

والفكرة الفذة التي جعلت جاوس يحدس هذه النتيجة تتضح من

التالى :

الدالة $\frac{N}{E(N)}$ لها الخاصية التالية (سوف نرمز لها بالرمز D)

$D(10N) = D(N) + 2^3$ ولكن هذه هي خاصية الدالة

اللوغاريتمية

$$H_{10N} = H_N + H_{10}$$

ومن هنا جاء إقتراح

$$\frac{N}{E(N)} \sim H_N$$

إن هذه النتيجة التي وصل إليها جاوس في هذا السن الصغير ودون
حاسب آلي إنما هي دليل على عبقرية جاوس

(٣)

(تابع إطلالة عامة)

الحاسب الآلى كمساعد فى البحث الرياضى

قبل إكتشاف الحاسب الآلى كان عند بعض الرياضيين الصبر للقيام بحسابات مطولة ، مثل أويلر و جاكوبى ، و حاوس ، و رامانوجان (رياضى هندى فى القرن العشرين) . وهذه الحسابات المطولة هى الأساس الذى أقاموا عليهم دعاويهم Conjectures الرياضية وقد ثبت أن معظمها - وليس كلها - صحيح وامكن برهانها . وبالطبع نستطيع ان نتصور أنه لو كانت لدى هؤلاء الرياضيين العظام حواسب آلية كالتى نملكها اليوم كم النتائج النظرية التى كانوا سوف يصلون إليها . ومن الناحية التاريخية فنحن نعلم ان جاكوبى ذهب إلى ما نشتر لمقابلة بباچ Babbage لمعرفة مدى تقدم عمله فى بناء الماكينة التحليلية Analytical Engine وهى اول محاولة لعمل حاسب آلى . كما نعلم ان رامانوجان Ramanjan قد أسس عددا من دعاويه النظرية على نتائج حسابات ماكماهون .

وفى العشرين سنة الأخيرة إستخدم الحاسب الآلى فى عمل مساهمات هامة فى الإكتشافات النظرية الرياضية ، بما فى ذلك المساهمات التالية :

أ - برهان نظرية الألوان الأربعة .

ب- إثبات خطأ دعوى أويلر عن تعميم نظرية فرمات الأخيرة.

ج- تأكيد ان الـ ٢٥٠.٠٠٠ القيم الصفرية من دالة ريمان زيتا Reman zeta function .

(وتعرف ζ (ع) = $1 + \frac{1}{2^c} + \frac{1}{3^c} + \frac{1}{4^c} + \dots + \infty$ حيث ع مركب)

تقع فعلا على الخط الحرج $c = \frac{1}{2} + it$ ص

د - إيجاد قيمة ط لأكثر من مائة مليون رقم عشرى

١. نظرية الألوان الأربعة

ظهرت نظرية الألوان الأربعة خلال القرن التاسع عشر (١٨٥٢) عندما ذهب طالب (فردريك جوثرى) فى جامعة لندن إلى أستاذه (دى مورجان) ليقول له إنه قد لاحظ ان أربع ألوان تكفى لتأوين محافظات (مقاطعات) أى قطر بحيث لا يكون لمحافظةين بينهما حدود مشتركة لون واحد وقد لاحظ أن هذا صحيح مهما كان عدد المحافظات وأوضاعها فهل يمكن إثبات هذا نظريا ؟

لم يكن لدى الأستاذ دي مورجان إجابة على هذا السؤال ، لكنه نشر مقالا عن هذا الموضوع عام ١٨٦٠ وطرحه امام الرياضيين فى أوروبا وأمريكا .
إن أول محاولة جبرية لبرهان هذا النظرية جاءت على يد الإنجليزى كمب Kemp عام ١٨٧٩ أى بعد طرح المسألة علنا بتسعة عشر عاما . والغريب ان كمب كان محاميا بالمهنة وإن كان قد سبق له دراسة الرياضيات فى جامعة كامبردج . وقد نشر كمب برهانه فى " المجلة الأمريكية للرياضيات " واعتبر الموضوع منتها .

لكن المفاجأة المذهلة وقعت عام ١٨٩١ عندما قام استاذ بجامعة ديرهام (فى إنجلترا) بنشر بحث يبين فيه أن برهان كمب يحتوى على خطأ وأن المشكلة ما تزال دون حل . ورغم الصدمة فإن الشائع آنذاك فى أوساط الرياضيين الأوربيين أن الخطأ فى برهان كمب ليس من النوع الذى يصعب تداركه ، ولكن البرهان فى حاجة إلى بعض التعديل ليكون مقبولا .
لكن السنين مضت دون أن يستطع أحد تصحيح البرهان . ومنذ عام ١٨٩١ حتى عام ١٩٢٦ بذلت محاولات شتى دون جدوى . والحقيقة أنه لا يكاد يوجد عالم رياضى مرموق فى تلك الفترة إلا وقد حاول أن يحرق أصابه فى البحث عن برهان .

إلى أن أعلن الرياضيان آيل وهاكن الأستاذان بجامعة إلينوى فى الولايات المتحدة عن برهان جديد يشتمل على ١٢٠٠ ساعة عمل على الحاسب الآلى ، ويقع فى مائة صفحة كتلخيص ، ومائة صفحة من التفاصيل وسبعمائة صفحة من الهوامش .

ب . خطأ تعميم أويلر

تعرضنا من قبل لنظرية فرمات الأخيرة التي تقول إنه ليست هناك حلول صحيحة للمعادلة

$$س^N + ص^N = ع^N \quad ن < 2 \quad (1)$$

ولقد سميت هذه النظرية بهذا الاسم لأن فرمات (رياضي فرنسي في القرن السابع عشر) كتب على هوامش نسخته من كتاب ديوفانتيس Arithmetica قبل وفاته بأيام أنه عثر على برهان لهذه النظرية لكنه لضيق الهوامش لا يستطيع كتابته .

وبالطبع حاول أويلر إثبات نظرية فرمات الأخيرة لكنه فشل فإكتفى بدلا من ذلك تعميم نظرية فرمات على النحو التالي :

نظرية :

$$المعادلة \quad س_1^N + س_2^N + \dots + س_{r-1}^N = س_r^N \quad (2) \quad ن < 2$$

ليس لها حلول صحيحة للمتغيرات $س_1, س_2, \dots, س_r$

نلاحظ بالطبع أنه إذا كانت $ن = 3$ فإن المعادلة تصبح

$$س_1^3 + س_2^3 = س_3^3 \quad \text{وهذه معادلة فرمات في حالة } ن = 3$$

وبالتالي فإن نظرية أويلر صحيحة في حالة $ن = 3$

ولمدة مائتى عام إعتقد الرياضيون أن تعميم أويلر صحيح ، وإن لم يستطع أحد برهانه . لكن حديثا جدا وفى عام ١٩٦٦ ، وبفضل الحاسب الآلى إكتشف لاندروباركن أن

$$^{\circ} 144 = ^{\circ} 133 + ^{\circ} 110 + ^{\circ} 84 + ^{\circ} 25$$

وهذه حالة $n = 5$ فى نظرية أويلر أى أن هناك حلول صحيحة للمعادلة (٢) فى حالة $n = 5$ ، وهذا يثبت خطأ نظرية أويلر .
وحديثا جدا امكن لـ Elkies أن يثبت خطأ نظرية أويلر فى حالة $n = 4$ وهكذا وبفضل الحاسب الآلى امكن إثبات أن تعميم أويلر لنظرية فرمات غير صحيح .

ج . أصفار دالة ريمان زيتا

عرفنا دالة ريمان زيتا من قبل . ومنذ زمن ريمان هناك فرض عرف بإسم " فرض ريمان " Riemann Hypothesis ، وهو يتعلق بجذور هذه الدالة ، أى بالقيم المركبة $\sigma + it$ التى تجعل هذه الدالة تساوى صفرا .
ويقول فرض ريمان إن جذور هذه الدالة هى على الصورة

$$\sigma + \frac{1}{2}it = 0$$

أى جمع الجذور تقع على الخط الرأسى الموازى لمحور الصادات
ويبعد عنه بمقدار $\frac{1}{2}$ ويعتبر "فرض ريمان" هذا أهم مشكلة رياضية غير محلوله
حتى اليوم .

لقد برهن الرياضى الإنجليزى هاردى Hardy فى الثلاثينيات على
أن هناك عددا لا نهائيا عن الجذور تقع على المستقيم $s = \frac{1}{2}$ ، لكننا مازلنا
حتى اليوم لا نعلم إن كانت كل الجذور تقع على هذا المستقيم .
ولقد أمكن بفضل الحاسب الآلى التحقق بالفعل من أن السبعين
مليون الجذور الأولى لهذه الدالة تقع فعلا على الخط الرأسى $s = \frac{1}{2}$

د . قيمة ط

خلال العشرين سنة الأخيرة جرى حساب قيمة ط بإستخدام الحاسب الآلى
لأكثر من مائة مليون رقم عشرى . وتلك هى الخطوة الأخيرة فى جهود
إستمرت ٢٥٠٠ سنة لحساب قيمة ط بدقة ، لكن هذه الجهود قفزت قفزات
هائلة منذ إكتشاف الحاسب الآلى (الكمبيوتر) .

ومن الطبيعى أن نتساءل : لماذا كل هذا الإهتمام بقيمة ط ؟
 خصوصا متى علمنا أن قيمة ط لتسعة وثلاثين رقم عشرى كافية لحساب
 محيط الأرض بخطأ أقل من نصف قطر ذرة الهيدروجين .
 لقد كان أرشميدس أول من وضع طريقة منهجية لحساب قيمة ط عن
 طريق المثلثات المنتظمة الداخلة والخارجة للدائرة وبالتالى حساب قيمة
 مساحة الدائرة بأنها تقع بين مساحة المثلثات الداخلة ومساحة المثلثات
 الخارجة ، وأوصله هذا إلى أن

$$3\frac{1}{7} > \pi > 3\frac{1}{11}$$

تلك كانت المحاولة المنهجية الأولى ، وآخر المحاولات المنهجية
 باستخدام الورقة والقلم جاءت على يد وليم شانكس William Shanks الذى
 حسب ط لـ ٧٠٧ رقم عشرى ونشر نتيجته عام ١٨٧٣ . وفى عام ١٨٨٢ أثبت
 لندمان Lindemann لأول مرة أن ط عدد غير نسبى irrational وبالتالى
 فليست هناك نهاية للرقم العشرى لقيمة ط

ولقد وضع هذا الإكتشاف نهاية لمسألة " تربيع الدائرة " Squaring
 the circle التى كانت أحد أسباب جهود البحث عن قيمة ط تاريخا (مسألة
 تربيع الدائرة هى باختصار على النحو التالى : المطلوب رسم مربع مساحته
 تساوى مساحة دائرة معلومة)

إن هذه النتيجة (طـ عدد غير نسبي) لم تشجع أحداً بعد شانكس
عل حساب طـ بدقة أكبر . وهكذا نام موضوع طـ لمدة سبعين سنة . لكنه عاد
إلى دائرة الإهتمام من جديد ف القرن العشرين حيث أمكن حساب طـ
لألفى رقم عشرى عام ١٩٤٩ دون حاسب آلى .

وتمت القفزة من ٢٠٠٠ رقم عشرى عام ١٩٤٩ إلى أكثر من ١٠٠
مليون رقم عشرى عام ١٩٨٧ بفضل توفر حواسب قوية جداً وسريعة جداً .
ولكن الأهم من ذلك أن تحقيق هذه الدقة القوية إحتاجت إلى جهد قوى
فى تبسيط خوارزميات الدوال الجبرية ، ثم حديثاً جداً إتجه البحث فى
موضوع قيمة طـ من إستخدام صيغ الجمع التقليدية Summation formulae
إلى إستخدام فكرة الحلقات التكرارية Iteration loops التى تلائم
الحاسب الآلى .

ومن مزايا إستمرار البحث فى موضوع هذا أنه حفز إحياء البحث
فى مسائل التحليل الكلاسيكى والبحث فى موضوعات أخرى لتبسيط
الخوارزميات الحسابة .

وأخيراً فإن برامج حساب طـ أصبحت ذات دور فى إختبار قدرة
الحاسب ومدى الثقة به والآن إليك إشارة عن طرق الجمع التقليدية لحساب
طـ قبل إكتشاف الحاسب الآلى .

يبدأ البحث فى هذا الموضوع من متسلسلة جريجورى وهى

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots, \text{ وتنتج هذه}$$

المتسلسلة من معرفة أن

$$\pi - 1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \dots \right)$$

ويوضح $s = 1$ نحصل على متسلسلة جريجوري وهي تقاربية لكن

تقاربها بطيء جدا ولذا فهي بلا فائدة في حساب π

ثم إكتشفت صيغ أويلر

$$\frac{1}{2^s} \zeta(s) = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\frac{1}{4^s} \zeta(s) = \frac{\pi^4}{90}$$

وقد جرى إستخدام صيغ أويلر لحساب π لأكبر عدد من الأرقام

العشرية ، فقام ، رزفورد عام ١٨٥٣ بحساب π لـ ٤٤٠ رقم عشري وفي نفس

السنة قام شانكس بحساب π لـ ٦٠٧ رقم عشري ثم قضى العشرين السنه

التالية في تحسين هذه النتيجة بحساب π إلى ٧٠٧ رقم عشري . وظل هذا

هو الرقم القياسي لمدة سبعين سنة إلى أن أوضح فيرجسون عام ١٩٤٥ أن

نتيجة شانكس عام ١٨٥٣ (حساب π لـ ٦٠٧ رقم عشري) صحيحة لـ ٥٢٧

رقم عشري فقط ، وبالتالي فإن جهد شانكس لمدة عشرين سنة ضائع هباء .

ويعتبر جهد فيرجسون هو نهاية ما قبل عصر الكمبيوتر ، إذ استطاع
بإستخدام آلة حاسبة يدوية حساب قيمة ط إلى ٨٠٨ رقم عشري .

هو/مش:

(١) أشرنا في الصفحات السابقة إلى الطريقة التكرارية الملائمة لحساب الكمبيوتر . ولتوضيح هذا نذكر أن من الطرق القياسية لحل المعادلة د (ع) = ٠ هو إعادة كتابتها على الصورة

$$ع = ف (ع) \quad (١)$$

(وهذا يمكن عمله بطرق لا نهائية) ثم تحويلها إلى عملية تكرارية iterative process بوضع $ع_n$ محل $ع$ في الطرف الأيسر ، $ع_{n+1}$ محل $ع$ في الطرف الأيمن من (١) ، وتصبح

$$ع_{n+1} = ف (ع_n) \quad (٢)$$

ثم نبدأ بنقطة إختيارية $ع_1$ ونستخدم (٢) لحساب $ع_2$ ، إذا ان

$$ع_1 = ف (ع_1)$$

ثم من $ع_1$ نحسب $ع_2$ وهكذا بأمل أن تؤول $ع_n$ إلى مقدار محدود عندما تؤول n إلى ∞ .

مثلا إذا أردنا ان نحل المعادلة $ع^2 = ٢$

$$نلجا إلى إستخدام العملية التكرارية $ع_{n+1} = \frac{1}{2} (ع_n + \frac{2}{ع_n})$ \quad (٣)$$

إذا كانت ϵ ← مقدار ϵ عندما تقول ن إلى ∞ فإن

$$\frac{1}{\epsilon} + \epsilon \frac{1}{2} = \epsilon$$

$$\frac{1}{\epsilon} = \epsilon \frac{1}{2} \quad \text{أى}$$

$$\text{أى} \quad \epsilon^2 = 2 \quad \text{وهى المعادلة الأصلية}$$

والآن نأخذ $\epsilon_1 = 1$ مثلما فى (٣) نجد أن $\epsilon_2 = 0.5$

$$\text{وبالتالى} \quad \epsilon_3 = \frac{2}{3} + \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{17}{12}$$

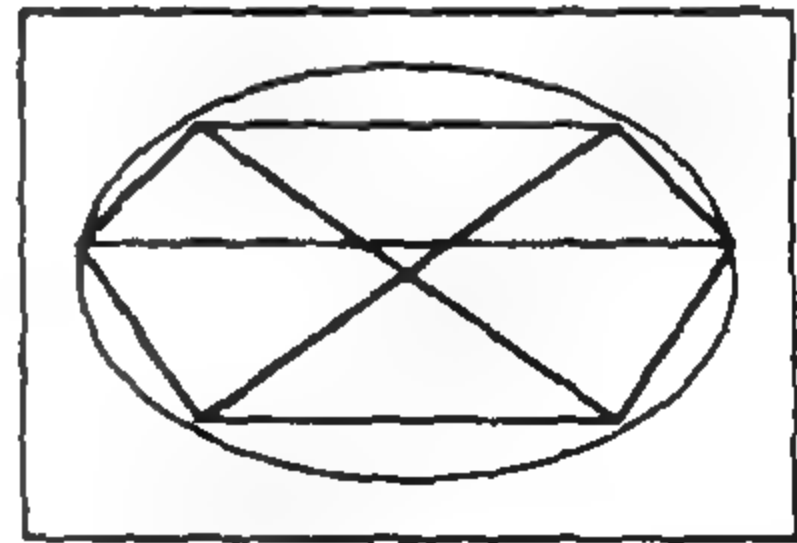
$$1.41666 = 1 \frac{5}{12} = \frac{17}{12} = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} =$$

$$\epsilon_4 = 0.70833 + \frac{1}{1.41666} = 1.41421$$

وهذه القيمة صحيحة للتعبير عن $\sqrt{2}$ لخمس أرقام عشرية .

(٢) أشرنا إلى طريقة أرشميدس فى حساب قيمة π وذلك عن طريقة فكرة أن مساحة الدائرة تقع بين مساحة مجموع المثلثات المنتظمة داخل الدائرة ومساحة مجموع المثلثات المنتظمة الخارجة .

وهذه الفكرة هى الأساس فى حساب المساحة كتكامل فيما بعد ذلك بقرون ، وهى أساس تعريف ريمان للتكامل



ولذلك يمكن القول إن لأرشميدس فضل وضع البذور الأولى لعلم التكامل .

(٤)

(رياضة الحضارتين الفرعونية والبابلية)

ربما كان أكبر دليل على مهارات البابليين الحسابية يتمثل فى الجداول التى كتبوها على ألواح الطين لمساعدتهم فى العمليات الحسابية .
لقد كان للبابليين نظام عددى متقدم ، وهو نظام موضعى أساسه العدد ٦٠ وليس العدد ١٠ كما نفعل اليوم ، أى ان النظام هو النظام الستونى وليس النظام العشرى . وسوف نلاحظ ان عوامل الأساس ١٠ هى ٢ ، ٥ بينما عوامل الأساس ٦٠ هى عشرة أعداد (هى ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ١٠، ١٢، ١٥، ٢٠، ٣٠) مما يساعد فى كتابة الأعداد الكبيرة فى حيز محدود .
ولقد قسم البابليون اليوم إلى ٢٤ ساعة والساعة إلى ٦٠ دقيقة و الدقيقة إلى ٦٠ ثانية وظل هذا النظام الستونى مستعملا نحو ٤٠٠٠ سنة .
فلكى نكتب مثلا ٣٠ ثانية ٢٥ دقيقة ٥ ساعة بهذا الإسلوب نكتب كما يلى :

$$٥ \cdot \frac{٢٥}{٦٠} \cdot \frac{٣٠}{٣٦٠٠}$$

بينما النظام العشرى يؤدى إلى الكتابة التالية لنفس العدد

$$٥ \cdot \frac{٤}{١٠} \cdot \frac{٢}{١٠٠} \cdot \frac{٥}{١٠٠٠}$$

وهو نفس ما نضعه اليوم على هيئة ٤٢٥ ر ٥ ساعة

في عام ١٨٥٤ وجد سنكره لوحان من الطين على نهر الفرات يعود تاريخها إلى عام ٢٠٠٠ قبل الميلاد ، وبهما جدولان يعطيان مربعات الأعداد من ١ إلى ٥٩

$$\text{فمثلا } ١٤ = ٢٨ \text{ أي } ١٤ = ٤ + ٦٠ \times ١ = ٢٨$$

$$\text{وهكذا حتى } ٢٥٩ = ٥٨١ \text{ أي } (٣٤٨١ = ١ + ٦٠ \times ٥٨)$$

ومن نقاط الضعف الأساسية في هذا النظام هو عدم وجود الصفر .
لأن هذا معناه أن الأعداد ليس لها تمثيل واحد وإنما يتطلب الآن توضيح السياق الذي كتب به العدد ، لكي نعرف مثلاً ما إذا كان العدد ١ يعني فعلاً ١ أو ٦١ أو ٣٦٠١ ... إلخ .

أما بالنسبة للضرب فقد استخدم البابليون الصيغة

$$١ \cdot ب = \left(\frac{١+ب}{٢} \right)^٢ - \left(\frac{١-ب}{٢} \right)^٢$$

وبذلك حولوا الضرب إلى جمع وطرح . فمثلاً

$$\left(\frac{١٣+٧}{٢} \right)^٢ - \left(\frac{١٣-٧}{٢} \right)^٢ = ١٣ \times ٧$$

$$٩١ = ٩ - ١٠٠ =$$

أما في القسمة فقد لجأ البابليون إلى تحويل القسمة إلى ضرب كما يلي

$$أ ÷ ب = أ \times \frac{1}{ب}$$

وأنشأوا جداول لحساب مقلوب الأعداد الطبيعية وبالطبع هذه المقلوبات كانت بدلالة النظام الستيني وليس النظام العشري . وإليك بعض امثلة هذا المقلوب

٣٠	٢
٢٠	٣
١٥	٤
١٢	٥
١٠	٦
٣٠ ٧	٨
٤٠ ٦	٩
	٦ ١٠
	٥ ١٢

نلاحظ أنه في هذا الجدول هناك فجوات ، فمثلا مقلوب ٧ ، ١١ ، ١٣ غير موجودة . ولكن هذا ليس معناه ان البابليين لم يكونوا قادرين على حساب $\frac{1}{13}$ مثلا . فهم يكتبون

$$\left(\frac{1}{90}\right) \times 7 = \left(\frac{1}{91}\right) \times 7 = \frac{7}{91} = \frac{1}{13}$$

٩٠ موجود بالجدول

وفى الألواح البابلية التى إكتشفت حديثا وجد أن بعضها يعود إلى ١٩٠٠ ، أو ١٦٠٠ قبل الميلاد ، ويحتوى على إجابات لمسألة تتضمن ثلاثيات فيثاغورس أ ، ب ، ج حيث

$$أ^2 + ب^2 = ج^2$$

ويقال إن هذا اللوح هو أقدم وثيقة فى نظرية الأعداد مكتشفه حتى

اليوم

وفى لوح آخر موجود فى المتحف البريطانى ترد المسألة التالية :

الطول ٤ والقطر ٥ . احسب العرض وتأتى الإجابة كما يلى :

خمسه فى خمسة ٢٥ وأربعة فى أربعة ١٦ وبأخذ ١٦ من ٢٥ نحصل

على ٩ . ماهو العدد الذى مربعة ٩ ؟ الإجابة ٣ . وإذن العرض ٣ .

أما المصريون القدماء فكان لهم نظام عددى آخر قريب من النظام

الرومانى ، وهو نظام لابس به فى عمليات الجمع ، لكنه ليس ملائما أبدا لعمليات الضرب .

لقد كان المصريون القدماء عمليين جدا فى تعاملهم مع الرياضيات ،

وهو أمر واضح فى ورقة بردى رند Rhind (نسبة إلى عالم الآثار الأسكتلندى

هنرى رند) وفى ورقة بردى موسكو ، وتعود كل من الورقتين إلى حوالى

١٨٥٠ قبل الميلاد .

وعلى خلاف اليونانيين الذين كانوا يفكرون فى الأعداد بشكل مجرد ، نجد أن المصريين القدماء كانوا مشغولين بالحساب العملى . فهم يفكرون فى ثمان مقاعد أو سبعة قوالب طوب عندما يذكرون العدد ٨ أو ٧ . ولعلاج نقط ضعف نظامهم فى كتابة الأعداد لجأوا إلى حيل مختلفة للقيام بعمليات الضرب كما توضح ورقة الرند على النحو التالى :

نفرض أننا نريد ضرب ٥٩×٤١

نأخذ ٥٩ ونضيف إليها نفسها ، ثم نضيف الناتج إلى نفسه وهكذا

نستمر

٥٩	٤١	
٥٩	١	x
١١٨	٢	
٢٣٦	٤	
٤٧٢	٨	x
٩٤٤	١٦	
١٨٨٨	٣٢	x

وحيث أن $٤١ < ٦٤$ فلا داعى لإستكمال الجدول بعد ٣٢

والآن $٩ = ٣٢ - ٤١$ ، $١ = ٨ - ٩$ ، $١٥ - ١ = ١٤$.

وإذن $١ + ٨ + ٣٢ = ٤١$

والآن نضع العلامة x على الأعداد الملائمة فى الجدول ثم نجمع

فنحصل على ٢٤١٩

وبالطبع يمكن كتابة الجدول معكوسا على النحو التالي

٤١	٥٩	
٤١	١	x
٨٢	٢	x
١٦٤	٤	
٣٢٨	٨	x
٦٥٦	١٦	x
١٣١٢	٣٢	x

وحيث أن $٥٩ = ٣٢ + ١٦ + ٨ + ٢ + ١$ نضع علامة x على

الأعداد الملائمة ونجمع فنحصل على $١٣١٢ + ٦٥٦ + ٣٢٨ + ٨٢ + ٤١ =$

. ٢٤١٩

تابع (٤)

(الرياضيات فى الحضارة اليونانية)

التأريخ الزمنى للعلم اليونانى :

يجمع المؤرخون اليوم على أن تاريخ العلم اليونانى يشغل فى الحقيقة نحو ٩٠٠ عام ، وهو ينقسم إلى ثلاث مراحل كل مرحلة منها حوالى ٣٠٠ سنة .

فالمرحلة الأولى وهى أشدها خصوبة وأصاله من زاوية ظهور كل الأفكار الجديدة فيها والتأكيد على صلة العلم بالإنسان . ولذلك تعرف هذه المرحلة أحيانا بإسم " المرحلة البطولية " . ومع ذلك فهذه المرحلة لم تستطع أن تقدم - رغم أفكارها الغنية - النتائج العلمية المفصلة التى عرفت بها المرحلة الثانية . وتبدأ المرحلة الأولى من حوالى ٦٠٠ قبل الميلاد إلى موت أرسطوفى ٣٢٢ ق.م

وبعض المؤرخين يقسمون هذه المرحلة إلى فترتين : من ٦٠٠ ق.م إلى ٤٠٠ ق.م وهى التى شهدت نشأة وتطور المدرسة الأيونية . أما الفترة من ٤٠٠ ق.م إلى ٣٢٢ ق.م فهى الفترة التى شهدت تطور الفلسفة والتى خلقت لغة المنطق على وجه الخصوص وتشمل هذه الفترة حياة واعمال أشهر الفلاسفة اليونانيين : سقراط وأفلاطون و أرسطو .

والمرحلة الثانية (وتسمى المرحلة الهلينية) ويميل كثير من المؤرخين إلى اعتبار تأسيس مدرسة الإسكندرية بدءا لها وهي تنتهى عندهم بإكمال الغزو الرومانى للشرق حوالى بدء المسيحية .

وتنقسم هذه المرحلة إلى فترتين : إحداهما من ٣٢٠ ق.م إلى ١٢٠ ق.م وهي الفترة الأشد أهمية فيها تكونت تحت رعاية البطالسة بالإسكندرية فروع كاملة من العلم على أسسها الحالية تقريبا . إنها الفترة التى أنجبت الرياضيين الثلاثة العظام : أقليدس وأرشميدس وأبولونيوس فأقليدس قنن الرياضيات ونظمها فى كتابه (الأصول) الذى ما يزال يدرس حتى اليوم تقريبا وأرشميدس له مساهماته العبقريّة فى الهندسة والرياضيات عموما والميكانيكا . وأبولونيوس قدم مساهمات عن القطاعات المخروطية التى استخدمها جاليليو وكبلر ونيوتن كما هى فى علمى الفلك والقذائف بعد ذلك بأكثر من ألف عام .

أما المرحلة الثالثة فهي القرون الثلاثة الأولى للإمبراطورية الرومانية ، أى منذ مولد المسيحية حتى ٣٠٠ بعد الميلاد . وهذه المرحلة هى أقل المراحل أهمية من ناحية المعرفة الرياضية وربما كان أهم إنجاز تم فيها هو كتاب ديوفاتيس (٢٥٠ بعد الميلاد) فى الحساب وإسمه Arithmetica

المدرسة الفيثاغورية :

يقال أن فيثاغورس من أصل فينيقي ، إن كان قد إستقر في كريتون (جنوب إيطاليا) وكان فيثاغورس سياسيا نشيطا إرتبط بطريقة التجار واشتد تأثيره في محيطه سياسيا ودينيا إلى درجة أن المؤرخ البريطاني جورج طوسون يقارن وصفه بوضع المصلح البروتستاني كلفن في جنيف .

وقبل أفلاطون كانت هناك نزعتان في الفكر اليوناني :
النزعة المادية والنزعة المثالية التي نشأت على يد مدرسة فيثاغورس في الغرب .

ولقد تكونت حول فيثاغورس مدرسة وجماعة نصف رياضية نصف دينية تهتم بممارسة الزهد ودراسة الرياضيات في آن واحد في عصر تميز بالهزيمة المؤقتة لليونانيين على يد الفرس .

ولقد وجدت هذه المدرسة في الرياضيات مفتاحا للغز هذا الكون واداة لتنقية الروح حتى قال أحد أعضائها : إن وظيفة الهندسة هي إبعادنا عن المحسوس والغاني إلى المعقول والخالد . فتأمل الخالد هو غاية الفلسفة كما أن تأمل الغامض هو غاية الدين .

ولقد رأى فيثاغورس في الأعداد مفتاح فهم الكون ، فالخط المستقيم يتحدد بنقطتين كما يتحدد المستوى بثلاث نقاط ويتحدد الحجم بأربع نقاط ، ومن هنا إتجه فيثاغورس إلى إعتبار الكون كامنا في هذه الأعداد .

الفيثاغوريون إذن يعيدون كل شئ إلى العدد ، ويمكن بناء هذا العالم من الأعداد ١، ٢، ٣، ٤ ولذا فليس غريبا أن يكون العدد عشرة - مجموع ١، ٢، ٣، ٤ - يمثل قوة إلهية جبارة . ونظريته في الأعداد لم تكن رياضه فحسب ولا فيزياء فحسب ، وإنما كانت دينا كذلك .

وهم يعتبرون المشتغلون بالرياضيات حفظه سر إلهي لا يجوز إفشاؤه حتى أن أحد تلاميذ المدرسة (هيبابوس) مات غرقا في الحمام لأنه أفضى سر المصلع المنتظم ذي الإثنى عشر وجها .

وكان الفيثاغوريون يتمادون في عملية المناظرة بين الأعداد والأشياء الموجودة في هذا العالم . فالأعداد الفردية مذكرة والزوجية مؤنثة . والعدد ١ ليس عددا في حد ذاته بل هو مصدر كل الأعداد فلذا فهو رمز للتعقل ، والعدد ٢ رمز للرأى ، والعدد ٣ رمز للقدرة الجنسية ، والعدد ٤ رمز للعدل والعدد ٥ رمز للزواج وهكذا .

ومن الأعداد البهي الكريم ومنها الكتيب المضجر ، فالأعداد التامة بهية وكريمة لأنها نادرة الوجود (العدد التام هو الذي مجموع عوامله هو العدد نفسه مثل $٦ = ١ + ٢ + ٣$ ، $٢٨ = ١ + ٢ + ٤ + ٧ + ١٤$) . وقد أمضى نيوماخوس السكندري (المنتمى للمدرسة الفيثاغورية الحديثه) زمنا طويلا إلى أن أهدى إلى العددين التامين التاليين وهما ٤٩٦ ، ٨١٢٨ ، ثم بدل جهدا فارقا

للحصول على العدد التام التالى فلم يوفق فإستاء من ذلك كثيرا]
نعلم اليوم أن هذا العدد هو ٣٣٦ ر ٥٥٠ ر ٣٣ [

والأعداد هى عند الفيثاغوريين أخلاق أيضا . سئل
فيثاغورس عن تعريفه للصديق فقال : صديقك من كان صورة منك
مثل العددين ٢٢٠ ، ٢٨٤ .

وتفسير ذلك أن الأعداد الصحيحة التى يقبل العدد ٢٨٤
القسمة عليها هى (١ ، ٢ ، ٤ ، ٧١ ، ١٤٢) ومجموعها ٢٢٠ والعكس صحيح .
وكل هذه الدراسات النصف رياضية والنصف دينية كانت
ذات فائدة كبرى فى تطوير نظرية الأعداد فيما بعد . وتعتبر دراستهم
للأعداد الأولية هى التمهيد الأول لنظرية الأعداد الحديثه .

أزمة الفيثاغوريين :

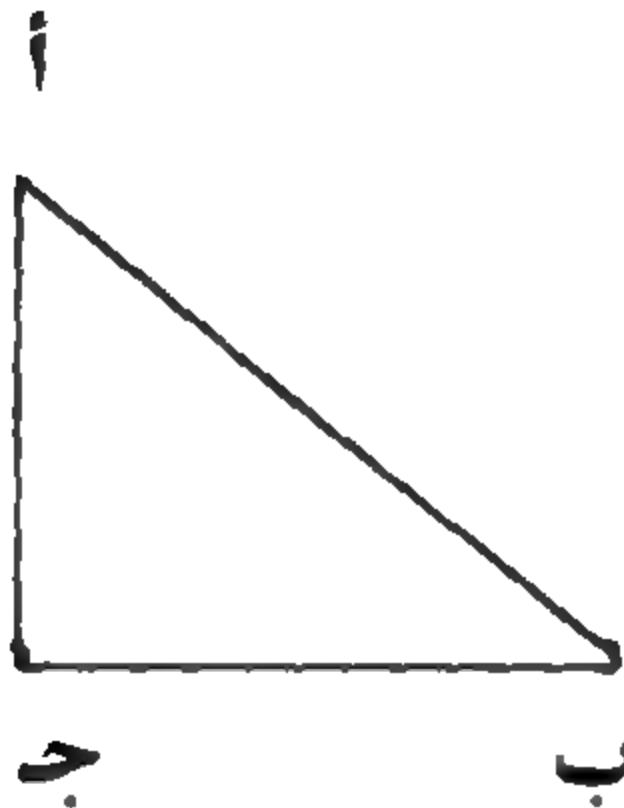
فى منتصف القرن الخامس قبل الميلاد أصيبت المدرسة الفيثاغورية
بصدمة علمية أدت فى نهاية الأمر إلى إنهيارها ، إذ أصابت هذه الصدمة
صميم موقفها من الأعداد .

فقد تصور الفيثاغوريون النقطة باعتبارها ذات كيان ، ولذا فمن
الطبعى أن يكون عدد النقط فى الخط المستقيم محدودا . هنا ما إفترضه
الفيثاغوريون حتى ولو لم تكن لديهم فكرة واضحة عن هذا العدد بالضبط .
وقد ترتب على هذه الفكرة الربط الوثيق بين الحساب والهندسة
فلكل خط مستقيم عدد صحيح يرتبط به (هو عدد النقط المكونه له) وهو ما

تعبّر عنه بطول الخط المستقيم . ومعنى هذا أن النسبة بين طول الوتر وطول

الضلع في المثلث القائم الزاوية $\left(\frac{أب}{أج} \right)$ هي نسبة بين عددين صحيحين

أى عدد نسبي



والآن إذا كان لدينا مثلث قائم الزاوية أ ب ج فيه أ ج = ب ج =

واعتبرنا أ ج وحدة القياس فإن أ ب = ٢ = ١ + ١ حسب نظرية فيثاغورس

ومن الطبيعي أن تتساءل المدرسة عن طول أ ب ، أى عن العدد

النسبي الذى إذا ربعناه أعطانا العدد ٢

ولقد بذلت المدرسة جهودا ضخمة للحصول على هذا العدد ، ثم

اكتشف الفيثاغوريون ببرهان جبرى بسيط ان هذا العدد غير موجود .

البهرهان : نفرض ان $\frac{م}{ن} = \sqrt{٢}$ حيث م ، ن أعداد صحيحة ليس بينها

عامل مشترك

$$\frac{م^2}{ن^2} = ٢ \quad \therefore \quad \text{أى } م^2 = ٢ ن^2$$

إذن 2^m عدد زوجي وإذن m عدد زوجي $= 2^k$ مثلاً حيث

k عدد صحيح

$$\text{أى أن } 4^k = 2^{2k} \quad \text{أى أن } 2^2 = 2^2 \quad \text{أى أن } 2^2 = 2^2$$

∴ 2^n عدد زوجي وإذن n عدد زوجي

أى أن كلا من m ، n عدد زوجي وهذا يناقض الفرض

وإذن لا يمكن وضع $\sqrt{2}$ في صورة عدد نسبي

ولقد كان أمام الفيشاغورثيين أحد طريقين للخروج من هذا المأزق :

فإما أن تكون فكرة القياس غير حقيقية ، أو أن يوسع مفهوم العدد ليتضمن الأعداد غير النسبية irrational أيضاً ، كما اقترح عمر الخيام بعد ذلك بقرون في كتابه (الجبر) .

وإتجه الفيشاغورثيون إلى الحل الأول وهذا أبعد القياس عن الهندسة وإشتد الإتجاه للبحث عن براهين مستقلة للنظريات الهندسية ليس بها ذكر لفكرة القياس ، أى إشتد الإتجاه للعزل بين الحساب والهندسة ، ولم يبدأ الربط بينهما من جديد إلا على يد ديكارته في القرن السابع عشر عندما بدأت المدرسة الجبرية الحديثة في الهندسة .

والمؤرخين يدهشهم تعثر علم الجبر في الحضارة اليونانية وضآلة التقدم الذى تم على يد ديوفاتيس في مرحلة متأخرة جداً ولهذا التخلف أسباب عديدة منها الإفتقار إلى لغة رمزية يستحيل تقدم الجبر طويلاً بدونها ، ومنها أزمة المدرسة الفيشاغورية التى أدت إلى عزل الجبر عن أحد منابعه الخصبة (الهندسة) .

وهنا يطرح السؤال التالى : لماذا إتجه الفيثاغوريين إلى الحل الأول للخروج من الأزمة ولم يتجهوا للحل الثانى ؟

يبدو أن السبب يكمن فى إدراكهم أن قبول الحل الثانى كان فى الحقيقة يعنى التخلّى عن فكرة العدد المحدود من النقط فى الخط ، وقبول أن كل خط مستقيم محدود يحتوى على عدد لانهاى من النقط ، ومعنى هذا قبول الفرض الأقليدى الذى جاء فيما بعد عن النقط التى تشغل موقعا ولا تشغل حجما . وقبول مثل هذا الفرض كان يعنى إنهيار النظام الفيثاغورى بأكمله ، ولهذا كان من الطبيعى أن يبتعد الفيثاغوريون عن الحل الثانى .

بالطبع لابد أن نذكر أن الفرض الأقليدى عن النقطة لم يحل المسألة نهائيا . فنحن نعلم أن أزمت رياضيه عديدة ثارت من ذلك وكانت مترتبة على هذا التعريف . ونشير إلى ما أثاره كانتور حول ما يترتب على هذا التعريف من أن جزء اللانهاية يساوى كل اللانهاية وهى أبحاث خصبة لا مجال للدخول فيها هنا .

تقسيم المدرسة الفيثاغورية :

- أدخل الفيثاغوريون فكرة التطهر من خلال المعرفة الناتجه عن التأمل السلبي ، وأغراهم بهذا بحثهم فى الهندسة واكتشافاتهم التى بدت وكأنها لا صلة لها بالواقع أو كأنها نوع من الكشف الصوفى . ولذا بدأ أنها تمثل معرفة تسمو على المعرفة التجريبية . ولقد عبر أفلاطون عن هذا الموقف عندما كتب على باب الأكاديمية (المدرسة التى كان يقودها) : " لا يدخلها إلى المشتغلون بالهندسة " ، ولقد صنف أفلاطون رواد الألعاب

الأوليمبية إلى ثلاثة أنواع : الذين يذهبون للبيع والشراء ، واللاعبون ، ثم النظارة . وعنده أن النوع الأخير هو أرقى الأنواع لأنهم يتأملون ؟
وهذه الفكرة عن العلم البحت كعملية تأمل مازالت موجودة حتى

لبع فإن هذا لا يمنعنا من تأكيد الجوانب الإيجابية في المدرسة
الفيثاغورية ، نقصد النتائج الفعلية التي حققوها في العلوم الرياضية بما
في ذلك نظرية فيثاغورس عن المثلث القائم الزاوية وابعائهم في نظرية
الأعداد (الأولية ، المثلثية ، التامة .. إلخ) ثم دراستهم للحجوم المنتظمة
التي مهدت لنظرية الزمر groups الحديثة ، ثم أبحاثهم في جمع
المتواليات بأنواعها المختلفة تلك الأبحاث التي طرحت مسألة جمع
المتسلسلات اللانهائية وإن لم يفلحوا في جمعها .

● لقد أسس الفيثاغوريون طريقة البرهان الرياضي بالاستنباط Deduction
إبتداء من مسلمات (مصادرات) معينة ، وهذا المنهج هو أشد وسائل
تعميم الخبرة الرياضية قوة . لقد وضعوا بذلك اللبنات الأولى للمنطق
الشكلي Formal logic الذي صاغ أرسطو بعد ذلك قوانينه ، والغريب أنهم
لعبوا أيضا دورا في التمهيد للمنطق الجدلي حتى ولو لم يدركوا ذلك .
فنحن نعلم أن المستقيم محدود في طوله وغير محدود في عدد نقاطه ولا
يزعجنا ذلك .

فقد عالجوا في فترة متأخرة مسألة الإقتراب من جذر ٢ بالطريقة

التالية

إبدأ بالزوج (١، ١) ومنه تكون الزوج (٣، ٢) بإضافة العددين ١، ١.
في العنصر الأول وإضافة ضعف الأول إلى الثاني للحصول على العنصر
الثاني.

وباستمرار في هذه الطريقة نحصل على الإزدواج

... (١٩، ٢٠)، (٤١، ٢٩)، (١٧، ١٢)، (٧، ٥)، (٣، ٢)، (١، ١)

فإذا فرضنا أن العدد الأول في الزوج هو أ والعدد الثاني هو ب فسوف
نلاحظ أن

$$\begin{aligned} 1^2 - 2^2 &= \pm 1 \\ 2 - \frac{2^2}{1} &= \pm \frac{1}{1} \end{aligned} \quad \text{أي أن}$$

ولما كان أ يتزايد باستمرار فمن الواضح أن $\frac{1}{2^2}$ يقترب بسرعة من

الصفر ولذا

فإن $\frac{2^2}{1}$ تقترب بسرعة من ٢، أي $\frac{2^2}{1}$ يقترب بسرعة من جذر ٢

ويمكن التحقق مثلا من أن $\frac{99}{7}$ قريب جدا من $\sqrt{2}$

أي أن $\sqrt{2}$ يمكن تعريفه من خلال متوالية الأعداد النسبية

$$\left(\frac{3}{4}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \dots\right)$$

أو بمعنى آخر فإن هذه المتوالية تحمل في طياتها وجهين مختلفين : العدد النسبي ، والعدد غير النسبي $\sqrt{2}$

(٥)

متحف الإسكندرية أو (مدرسة الإسكندرية)

تعتبر مدرسة الإسكندرية بمنجزاتها العلمية المساهمة العلمية الأساسية للعصر الهليني (تبدأ المرحلة الهلينية من ٣٢٠ ق.م وتنتهى بإكمال الغزو الرومانى للشرق حوالى بدأ المسيحية) ، وتعتبر الفترة من ٣٢٠ ق.م إلى ١٢٠ ق.م (مرحلة الإسكندرية) أشدها أهمية ، فهى التى تكونت فيها تحت رعاية البطالمة بالإسكندرية فروع كاملة من العلم على أسسها الحالية تقريبا . إنها الفترة التى قدمت للبشرية الرياضيين الثلاثة العظام : إقليدس وأرشميدس وأبو لونيوس .

قبل متحف الإسكندرية لم تعرف البشرية أى محاولة واعية فى إتجاه تنظيم العلم وتمويله فى كافة فروع . وعلى الرغم من تقدير دور الأكاديمية (أفلاطون) ودور اللقيوم (أرسطو) إلا أن المتحف هو أول مؤسسة أبحاث تحتضنها الدولة وتنفق عليها . وقد ساهم المتحف فى تطوير العلم أكثر من أى مؤسسة قبله أو حتى بعده إلى اليوم .

وإذا قيما الإنتاج العلمى للمتحف بالإضافة إلى أعمال مراسليه (مثل أرشميدس) لوجدنا أنه أكثر تخصصا من أى شئ سبقه أو لحقه بألفى عام . ولقد إتبعنا المرحلة المبكرة من العلم السكندرى خطوات أرسطو ومدرسته ، ولذا يمكن إعتبار المتحف فى أوائل أيامه الفرع الرئيسى للقيوم ، ثم تفوق الفرع على الأصل بما منح من

إمتيازات . ولم يكن من النادر أن يجمع الباحثون الكبار بين التدريس فى أثينا والإسكندرية معا . فقد تولى أستراتو مثلا مهمة التدريس والبحث فى المكانين ، وكان لهذا الأمر فائدة كبيرة وتأثير إيجابى على المدرستين .

الرياضيات :

تطور العمل فى العلوم الرياضية والطبيعة بهدفين واضحين : أكاديمى وعملى وكان العمل الأكاديمى هو الأهم عند علماء الإسكندرية ، وتركز فى مجال الرياضيات ، وإنتهى على يد إقليدس إلى إنجاز أعظم مهمة وهى تقنين فرع الهندسة .

وفى مجال الهندسة أيضا تم الحصول على نتائج محددة مثيرة للإعجاب . فأرشميدس طبق وحسن طريقة إيدوكسس (طريقة الإستغراق) فى تحديد قيمة π إلى خمسة أرقام عشرية ، وفى إيجاد قانون حجم الكرة ومساحة سطحها وسطح الإسطوانة والمخروط ... إلخ .

وكان هذا العمل بداية حساب التكامل الذى حقق ثورة فى علم الطبيعة على يد نيوتن وفى العلوم الرياضية على يد ليبنتز ونيوتن . ومن الأشياء ذات المغزى ما قدمه أبولونيوس (٢٢٠ ق.م) فى دراسة منحنيات الدرجة الثانية التى عرفت بإسم القطاعات المخروطية (القطع الناقص ، القطع الزائد ، القطع المكافئ) وكان

عمل أبولونيوس من الكمال بحيث أخذه نيوتن وكبلر كما هو ودون
أى تغيير وطبقه فى وصف مسارات الكواكب فى السماء . على أن
أهم منجزات الرياضيات فى تلك المرحلة تتحدد فى تنظيم وتقنين
الهندسة على يد إقليدس .

لقد كان الربط المنطقى معروفا قبل إقليدس . لكن ربط
جزء كبير من المعرفة الرياضية فى بناء واحد من الإستنباط الذى
يبدأ من المسلمات (المصادر) لم يعرف قبل إقليدس وكانت قيمة
هذا بالنسبة للرياضيات كبيرة جدا كما يتضح من حقيقة أن إقليدس
مازال أساس تعليم الهندسة حتى اليوم فى المرحلة قبل الجامعية .
ولقد تضمن كتاب إقليدس (الأصول The elements) تعريفات
وفروض ، ثم مصادرات تبنى على أساسها نظريات الهندسة . ولقد بدت
هذه المصادرات من الوجهة العملية غير قابلة لأى شك ، وكان على
البشرية أن تنتظر حتى القرن الثامن عشر حتى يظهر رجال جدد
يشككون فى المصادرة الخامسة (مصادرة التوازي) فيستعيضون عنها
بمصادره أخرى.

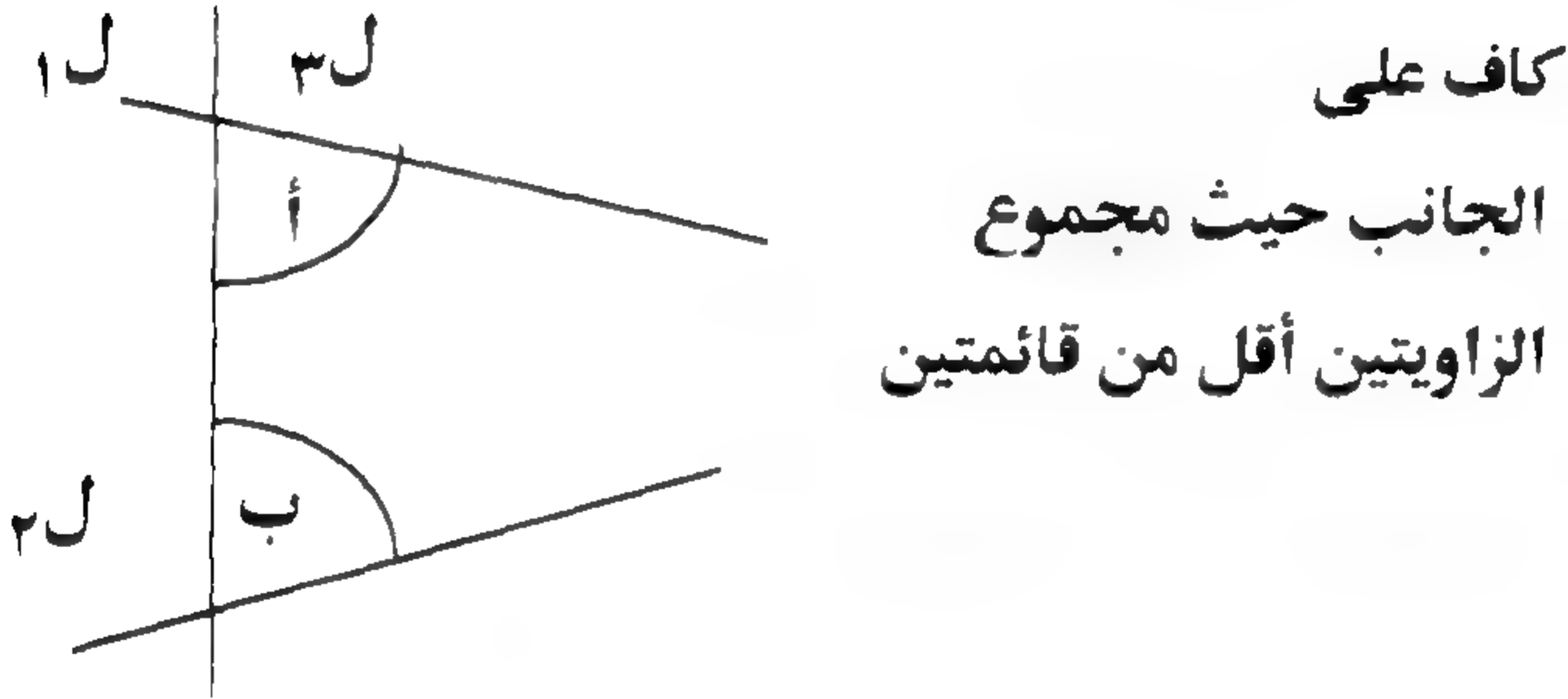
ومصادرات إقليدس الخمس هى :

- (أ) يمكن رسم خط مستقيم بين أى نقطتين .
- (ب) يمكن مد أى مستقيم محدود دون نهاية .
- (ج) يمكن رسم دائرة مركزها نقطة معطاة ونصف قطرها أى
مقدار معلوم.

(د) كل الزوايا القائمة متساوية .

(هـ) إذا قطع مستقيم $ل٣$ مستقيمين $ل١$ ، $ل٢$ يقعان في

مستوى ، وكان مجموع زاويتي الداخل أقل من قائمتين
فإن المستقيمين $ل١$ ، $ل٢$ سوف يلتقيان إذا مدا بشكل



أى إذا كانت $أ + ب > ١٨٠^\circ$ فإن الخطين $ل١$ ، $ل٢$

سوف يلتقيان على الجانب الأيمن من المستقيم $ل٣$.

وتعرف هذه المسلمة (هـ) بالمسلمة الخامسة ، وأحيانا مسلمة
التوازي لأنه يمكن فى الحقيقة أن نثبت أن هذه الصياغة للمسلمة
الخامسة تتكافئ مع صياغة أخرى لنفس المسلمة على النحو التالى :

إذا علم مستقيم $ل$ ، ونقطة $ق$ خارجه فإنه يمكن رسم مستقيم

واحد يمر بالنقطة $ق$ ويوازي المستقيم $ل$

× $ق$

$ل$ _____

وينقسم كتاب إقليدس (الأصول) إلى عدة أجزاء من ١ إلى ١٣ .
فالأجزاء الأربعة الأولى مخصصة للهندسة المستوية ، والأجزاء ٧ ، ٨ ،
٩ تتعلق بالحساب وتختص كلها بالأعداد النسبية (العدد النسبي هو
الذى يمكن وضعه فى صورة $\frac{m}{n}$ ، حيث م ، ن أعداد صحيحة) أما
الأجزاء ٥ ، ٦ فهى خاصة بنظريات التناسب كما تتضمن تطبيقات
على المساحات هى فى الواقع الحل الهندسى لمعادلات من الدرجة
الثانية ، ومن الواضح أن الخوارزمى فى كتابه (الجبر والمقابلة)
- بعد إقليدس بعدة قرون - كان متأثراً بطريقة إقليدس هذه فى
معالجة معادلات الدرجة الثانية.

وتتعلق الأجزاء ١١ ، ١٢ ، ١٣ بهندسة الفراغ .
أما الجزء العاشر فهو أكمل الأجزاء ، وهو مؤسس على طريقة
الإستغراق (Exhaustion) التى قيل إن إيدوكسس هو أول من
إكتشفها ، وأساسها التقريب المتتالى للمساحات عن طريق المثلثات
المنتظمة الداخلية والخارجية ، كما شرحت من قبل ، للحصول على
مساحة الدائرة ، ويعتبر الجزء العاشر - إذا نظرنا إليه من زاوية
أخرى - مكرسا بالكامل للأعداد غير النسبية irrational مثل ط ،
وكان لهذا الجزء ، بالإضافة إلى ترجمات الكتب العربية فى
الرياضيات إلى اللاتينية فى عهد الحروب الصليبية ، تأثير كبير على
الرياضيين الإيطاليين فى عصر النهضة .

أرشميدس:

ولد أرشميدس فى سيراكوز (صقلية) من أسرة أرستقراطية وكان على صلة قرابة بملك سيراكوز .

وبسبب أرستقراطيته ، وبالرغم من إكتشافاته الفذة فى شئون الميكانيكا (الروافع) والكثافة النوعية للذهب والفضة ... إلخ إلا أنه كان يحتقر كل الإختراعات ذات الصبغة العملية ، وتظل إكتشافاته فى الرياضة البحتة هى الجزء الأهم الذى يرتبط بإسم أرشميدس .

وفى شبابه درس أرشميدس لفترة فى مدرسة الإسكندرية وظل يتراسل مع بعض أعضاء هذه المدرسة بعد عودة إلى بلاده وإذا إستبعدنا مساهماته الكبيرة فى الفلك والميكانيكا فسوف يبقى له الفضل فى إيجاد مساحة منحنيات وسطوح عدة مثل مساحة الدائرة ومساحة سطح الكرة ومساحة قطعة من قطع مكافئ ومساحات الأشكال الناتجة عن الدوران حول الخط الأفقى . وإثبات أن ط تقع بين $3\frac{1}{7}$ ، $3\frac{1}{71}$ كما أعطى طرقا لحساب الجذور التربيعية .

ويشير برتراند رسل فى كتابه " تاريخ الفلسفة الغربية " إلى أن إيدوكسس إستخدم طريقة المضلعات الداخلية فحسب لبحث مساحة الدائرة . أما إستخدام طريقة المضلعات الداخلة والمضلعات الخارجة فتعود إلى أنتيفون فى رواية وإلى أرشميدس فى رواية أخرى .

ولقد مات أرشميدس مقتولا على يد جندي روماني عندما
غزا الرومان جزيرة صقلية بينما كان يتأمل شكلا هندسيا رسم على
الرمال .

المسائل الثلاث القديمة :

وفقا لأفلاطون فإن علم الهندسة هو علم إستخدام المسطرة والفرجار
وبهذا يمكن فى رأيه بناء الهندسة كلها . ولذا فليس غريبا أن تحاول
الرياضيات اليونانية التركيز على المسائل الثلاث التى عرفت بإسم
" المسائل الثلاث القديمة " وهى

- ١ - كيف يمكن تثليث زاوية معلومة (أى تقسيمها بإستخدام
المسطرة والفرجار إلى ثلاثة أجزاء متساوية) .
 - ٢ - كيف يمكن بناء مكعب هو ضعف مكعب معلوم .
 - ٣ - كيف يمكن إنشاء مربع مساحته تساوى مساحة دائرة معلومة .
- وهذه المسألة الأخيرة عرفت تاريخيا فى الغرب بإسم مسألة " تربيع
الدائرة Squaring the circle " ولم يكن آنذاك معروفا أن π عدد غير
نسبى Irrational ، ولذا من المستحيل إيجاد قيمة طول ضلع المربع
بالضبط ، والحقيقة أن إثبات أن π عدد غير نسبى لم يتم إلا خلال
القرن التاسع عشر (١٨٨٢) على يد لندهمان . ومنذ ذلك الوقت صار
يطلق فى الأدبيات الغربية على أى مسألة مستحيلة إسم "تربيع
الدائرة"

وإذا نظرنا إلى المسائل الثلاث سالفة الذكر فيمكن أن نقول أنه قد أصبح معروفا اليوم أنه لا يمكن حلها باستخدام المسطرة والفرجار فقط .

ديوفانتيس :

صاحب كتاب الحساب Arithmatica ، وهو كتاب كان له تأثير كبير على رياضى مرحلة النهضة فى أوربا (بدا من القرن السادس عشر الميلادى) كما يظن أن الخوارزمى ربما كان على معرفة بهذا الكتاب .

وقد ظهر ديوفانتيس وبرز خلال الحقبة الأخيرة من تاريخ العلم اليونانى ، اى منذ بدء المسيحية إلى ٣٠٠ ميلاديا ، وقد وضع كتابه هذا حوالى ٢٥٠ م .

ولقد أوضحنا من قبل كيف أن نجاح الهندسة وأزمة الفيثاغوريين بالإضافة إلى إفتقاد رمزية ملائمة قد أعاق تطور علم الجبر ويعتبر عمل ديوفانتيس عن معادلات الدرجة الثانية الإستثناء الوحيد . وهذا العمل الذى جاء متأخرا قد يشير إلى نفوذ الرياضيات البابلية على هذا الرياضى الكبير .

لقد بدأ ديوفاتيس بوضع مسائل عن معادلات الدرجة الأولى ، ومنها المعادلة المشهورة التي كان فيها المجهول s هو عمر ديوفاتيس نفسه ، وقد أوصى قبل أن يموت أن تكتب هذه المسألة على قبره .

ثم تقدم بعد ذلك في مناقشة معادلات الدرجة الثانية ووفق في الحصول على بعض الحلول وهو أول من إستخدم المختصرات في علم الجبر ، وليس بمستبعد أن يكون الخوارزمي قد قلّد ديوفاتيس في إستخدام المختصرات في معالجة معادلات الدرجة الثانية في كتابه " الجبر والمقابلة " ، فهو يعبر عن المجهول s سواء أكان أرضاً أو نقداً ... إلخ بكلمة " شئ " أو جذر ، وعن s^2 بكلمة مال .

على أن القضية الخطيرة الى طرحها ديوفاتيس في كتابه هي حلول المعادلة

$$s^n + v^n = e^n$$

ن عدد صحيح

بشرط أن تكون s ، v ، e تمثل أعداداً صحيحة موجبة .
ويطرح ديوفاتيس القضية في حالة $n = 2$ ، هذه الحالة تعرف اليوم بفضل نظرية فيثاغورس أنها ممكنة الحل ، بل هناك عدد لانهائي من الحلول الصحيحة الموجبة للمعادلة .

$$س^2 = ص^2 + ع^2$$

ويمكن الحصول على هذه الحلول إذا كانت س عدد صحيح فردى من المتطابقة

$$[1 + (1 + م)^2] = [(1 + م)^2] + (1 + م^2)$$

وإذا كانت س عدد صحيح زوجى فيمكن الحصول على الحلول من المتطابقة

$$(1 + م^2) = (1 - م)^2 + (م^2)$$

ولكن ما الموقف فى حالة ن = ٣ ، ٤ ، ... إلخ .

هل هناك قيم صحيحة موجبة ص ، ص ، ع تحقق المعادلة

$$س^2 = ص^2 + ع^2$$

أو بمعنى آخر كما يمكن تقسيم مربع كامل مثل ٢٥ ، ١٠٠ ،

... إلخ إلى مجموع مربعين كاملين

$$٤^2 + ٣^2 = ١٦ + ٩ = ٢٥$$

$$٨^2 + ٦^2 = ٦٤ + ٣٦ = ١٠٠$$

هل يمكن تقسيم مكعب كامل (مثلاً ٢٧ ، ٦٤ ... إلخ) إلى

مجموع مكعبين كاملين .

لم يستطع رياضي واحد أن يجد مثالا واحدا على ذلك .
 والمطلوب البرهان على ذلك . لقد ظل كتاب ديوفاتيس حتى القرن
 السابع عشر مرجعا هاما في الجبر ، وهذا الذي جعل الرياضي
 الفرنسي فيرمات (القرن السابع عشر) يكتب على هامش نسخته من
 كتاب ديوفاتيس "عندي برهان لهذه النظرية وإن كان لا يتسع
 الهامش لكتابته "

أى أنه ادعى أنه أثبت أن المعادلة

$$س^n + ص^n = ع^n \quad ن < 2$$

ليس لها حلول صحيحة موجبة

ولقد أمكن في القرن العشرين إثبات صحة هذه النظرية في
 حالات $ن = 3, 4, 5, \dots$ إلخ لكن حتى عهد قريب لم يوجد برهان
 عام ، وإن كان أحد الأساتذة في جامعة برنستون ذكر في العام
 الماضي (١٩٩٤) أنه عثر على حل .

سؤال : هل يمكن إثبات أن المعادلة $س^ص = ص^س$ ليس لها حلول
 صحيحة غير حل واحد $س = 2, ص = 4$ وإن كان لها عدد
 لانهائي من الحلول هي أعداد نسبية ؟

(٦)

رياضيات الحضارة العربية الإسلامية

الإسلام وحركة الترجمة :

خلال عهد الخليفة العباسى المنصور كان ضمن الوفد القادم من الهند إلى بغداد عالم هندى متخصص فى علم الفلك . وكان للفلك أهمية كبيرة عند خلفاء الدولة العباسية لأنهم لم يكونوا يفرقون بين الفلك والتنجيم أى إستطلاع نجوم السماء لمعرفة أوقات السعد وأوقات النحس لتجنب أى عمل فيها .

ولقد قام هذا العالم الهندى بمساعدة الفزارى على ترجمة نص فلكى مكتوب باللغة السنسكريتية . وكانت نتيجة هذا العمل كتاب "زيج السند هند " الذى يحتوى على معلومات فلكية عديدة بما فى ذلك طرق رياضية تستخدم الجيب .

ولقد أمر الخليفة المنصور - الذى بنى بغداد كعاصمة جديدة له - أن يبدأ العمل فى وقت معين من يوم ٣٠ يوليو سنة ٧٦٢ قال عنه المنجمون إنه وقت سعد (أحد هؤلاء المنجمين كان الفزارى نفسه) . ولا بد أن المنجمين قد أحسنوا عملهم إذ أن بغداد قد إزدهرت فعلا كمركز ثقافى وتجارى .

وخلال حكم هارون الرشيد تم بناء مكتبة كان من الممكن أن تجد بها أصول وترجمات أعمال علمية هامة باللغة السنسكريتية والفارسية واليونانية ، وهى الأعمال التى حفزت العلماء المسلمين الأوائل على العمل والإنتاج البحثى .

ثم أعطى الخليفة المأمون (٨١٣ - ٨٣٣ م) دفعة للنشاط العلمى عندما أسس معهدا للترجمة والبحث عرف بإسم " بيت الحكمة " . وفى هذا المعهد كان يعيش المترجمون ومساعدوهم الذين قاموا بترجمة أمهات الكتب اليونانية والسريانية والفارسية والسنسكريتية إلى اللغة العربية ، وإستخدم هؤلاء المترجمون - الذين إحتضنتهم عائلات ثرية بالإضافة إلى الخليفة - الطاقات الكامنة فى اللغة العربية بإستخدام تفريعات مختلفة للجذر الأصلى للكلمة ، وبهذا خلقوا ما أصبح لغة مشتركة للعلماء من شمال إفريقيا إلى الصين .

وفى بغداد كان هناك مرصد فلكى ، وكان من العاملين فى هذا المرصد وفى بيت الحكمة بعض من أعظم علماء ذلك العصر .

وبالإضافة إلى ذلك أرسل الخلفاء الأوائل من العباسيين بعثات إلى الأراضى الأجنبية للحصول على نسخ من الكتب الهامة لترجمتها . ومن الأمثلة على هذا البحث المضنى عن الكتب الأجنبية المتاعب التى واجهها مترجم من القرن التاسع - حنين بن إسحاق - فى بحثه عن كتاب جالينوس فى الطب . وهو يقول حسب النص الذى أورده روزنتال : " لقد بحثت بنفسى عن الكتاب فى العراق

وسوريا وفلسطين ومصر حتى وصلت إلى الإسكندرية ولم أجد شيئا
بإستثناء دمشق التي وجدت بها نصف الكتاب ولكن ما وجدته لم
يكن فصولا متتالية ولم تكن الفصول كاملة " .

والغريب أنه بعد ذلك بإربعمائة سنة تكرر هذا البحث عن
العلم الأجنبى، ولكن هذه المرة كان الأوروبيون هم الذين يسافرون
إلى الأراضى الإسلامية بحثا عن النصوص العلمية العربية الثمينة .
حدث هذا أيام الحروب الصليبية وبعدها ، تلك الحروب التى دارت
طوال القرنين الحادى عشر والثانى عشر الميلادى وانتهت بإخراج
الصليبيين والقضاء على ممالكهم التى كانوا أسسوها فى المشرق
العربى على طول ساحل البحر الأبيض المتوسط .

ولقد كان هناك تشجيع غير قليل من جانب أهل بغداد من
الأثرياء، ومثال ذلك الأشقاء الثلاثة المعروفون بإسم " بنو موسى " .
فبالإضافة إلى سفرهم حتى إلى الأراضى البيزنطية لشراء الكتب
والقيام بالأبحاث فى الرياضيات والميكانيكا ، فإن هؤلاء المواطنين
كانوا من الرعاة الأوائل لثابت بن قره الذى كان يعيش فى حران
(ديار بكر حاليا بتركيا) . ولقد عاش ثابت بن قره من ٨٣٦ إلى
٩٠١ م ، ومنحت مواهبه فى اللغات الأجنبية اللغة العربية واحدا من
أعظم المترجمين عن اليونانية .

ووفقا لإحدى الروايات فإن بنى موسى إكتشفوا مواهب
ثابت بن قره اللغوية عندما إلتقوا به فى حران إبان عملية صرافة ،

فأحضروه معهم إلى بغداد للعمل معهم حيث إزدهرت مواهبه الرياضية أيضا .

ومن المترجمين المهمين في تلك المرحلة المبكرة للعلم الإسلامي حنين ابن إسحاق ، وابنه إسحاق بن حنين ، وقسطا بن لوقا البعلبكي (نسبة إلى بعلبك في لبنان) والحجاج بن مطر .
والجدول التالي يلخص بعض الأعمال الرياضية اليونانية الهامة التي ترجمت وأسماء المترجمين والتواريخ التقريبية لتلك التراجم .

الترجمات العربية عن اليونانية

المؤلف	العنوان	المترجم	التاريخ
إقليدس	الأصول	الحجاج بن مطر إسحق ابن حنين ثابت بن قره	زمن هارون الرشيد والمأمون أواخر القرن التاسع مات عام ٩٠١ م
أرشميدس	البيانات Data البصريات الكرة والإسطوانة قياس الدائرة المضلع السباعي في الدائرة النظريات الصغيرة Lemmas	إسحق ابن حنين إسحق ابن حنين ثابت بن قره ثابت بن قره ثابت بن قره	مراجع ترجمة ضعيفة في أوائل القرن التاسع
أبولونيوس	القطاعات المخروطية	هلال الحمصي أحمد بن موسى ثابت بن قره	
ديوفانتيس	الحساب	قسطا بن لوقا البلبكي	مات ٩١٢ م
منيا لاوس	الدائرة	حنين ابن إسحاق	ولد ٨٠٩ م

نظرية عامة على المرحلة :

مثل أى حضارة لم تكن الحضارة العربية الإسلامية ثابتة فى دعمها للعلم والعلماء . فبعد عهد المأمون بوقت غير طويل تضائل الدعم الممنوح لبيت الحكمة ثم إختفت تلك المؤسسة العلمية وفى القرن التالى كتب السجزى شاكيا من أن الناس يعتبرون الإشتغال بالرياضيات كفر وأن قتل الرياضى حلال ! وربما كان السبب أن معظم الرياضيين كانوا أيضا فلكيين وبالتالى منجمين . والسبب الآخر هو أنه عند بعض المتزمتين فإن الإشتغال بالرياضيات يغرى بالإشتغال بالفلسفة ، والفلسفة عند هؤلاء طريق الكفر .

على أن السبب الأهم هو أن الإزدهار الذى صاحب العصر العباسى الأول قد ذبل فى العصر العباسى الثانى عندما كان العسكريون الأتراك السلاجقة هم الحكام الحقيقيون وكان الخلفية مجرد رمز فى معظم الأحيان . وعندما إنقسمت الدول العربية الكبيرة إلى ممالك وإمارات مستقلة أو شبه مستقلة . حرص الحكام الجدد فى كل إمارة على أن يكون لديهم فلكيوهم ومراصدهم ، ولذلك شجعوا العلماء ودعموهم . فمثلا عندما إستولى الفاطميون على السلطة فى مصر ، وإستقلوا عن بغداد أسس الحاكم بأمر الله مكتبة عام ١٠٠٥ وسماها دار الحكمة (حتى اليوم لايزل مقر نقابة الأطباء فى القاهرة يسمى دار الحكمة) كان بها قاعة مطالعة وقاعات للتدريس ومنح العاملون بها رواتب وضمن معاشا للباحثين حتى يتفرغوا لدراستهم .

ولا ينبغي أن ننسى أنه عندما دخل العرب الأندلس وأقاموا فيها قرونا وأسسوا فيها حضارة زاهرة كانت الرياضيات من العلوم التي وجدت تشجيعا خاصا من الملوك والأمراء ، وظل هذا الوضع قائما حتى القرن الخامس عشر الميلادي ، إذ أن المسلمين أسسوا في الأندلس حضارة عربية إسلامية دامت سبعة قرون .

ويمكن أن نقول بدون مبالغة أنه خلال الفترة ٢٥٠ - ١٤٥٠ م فإن الحضارة العربية الإسلامية أنتجت سلسلة من الرياضيين الكبار نجحوا في إبتكار النظام العشري بما في ذلك الكسور العشرية ، وفي خلق علم الجبر ، وفي الوصول إلى إكتشافات هامة في حسابات المثلثات المستوية والكروية وفي إكتشاف طرق جديدة لإيجاد حلول عديدة للمعادلات . وهذه القائمة ليست شاملة بالمرة .

على أنه يهمننا إبراز الإنجازات الكبيرة للحضارة العربية الإسلامية في الجبر خصوصا ، الذي لم يكن معروفا كعلم مستقل قبل الخوارزمي ، حتى أن الأوربيين إستخدموا اللفظ العربي " الجبر " للتعبير عن هذا العلم في اللغات الأوربية ، وصاروا يطلقون على أي عملية لحساب شئ " خوارزمية " Algorithm نسبة إلى الخوارزمي .

وصحيح أن كتاب ديوفانتيس في الحساب كان معروفا لدى العرب ومترجما إلى العربية ، وصحيح أيضا أن الحضارة الهندية القديمة كانت مصدرا آخر للجبر الإسلامي ، فقد كان العرب على

معرفة بكتاب براهما جوبتا الذى عاش فى النصف الأول من القرن السابع والذى احتلت أعماله الفلكية المسماه sidd hanta الذى عرف فى العربية بإسم " السد هنت " أهمية خاصة ، إلا أن علماء المسلمين لم يكونوا مجرد ناقلين لإنجازات الحضارة اليونانية القديمة والحضارة الهندية بل كانوا مطورين ومضيفين إضافات جوهرية . وإليهم يرجع الفضل فى مشروع " حسنة الجبر " أى معالجة التقارير الجبرية وفق قواعد الحساب .

ولقد قاد هذا المشروع (حسنة الجبر) الكرخى المتوفى فى بغداد فى القرن الحادى عشر ومن بعده السموأل (المتوفى فى ١١٧٥) إلى قوانين الأسس التى تم إستنباطها وكذلك قواعد الإشارات . وبحثت العمليات الجبرية على كثيرات الحدود لأول مرة فى التاريخ من جمع وطرح وضرب وقسمة وإستخدمت لأول مرة طريقة الإستنتاج الرياضى Mathematical Induction فى جمع

متواليات من نوع $\sum_{s=1}^n s = \frac{n(n+1)}{2}$ ومع ذلك تنسب هذه

النتائج الهامة فى الكتابات الأوربية - إلى رياضيين أوروبيين متأخرين ، كما يقال إن طريقة الإستنتاج الرياضى تعود إلى بسكال .

فالنظرة التقليدية عند الأوربيين المحدثين تروى تاريخ

الجبر الكلاسيكى كتتابع لثلاث أحداث منفصلة :

أ - صياغة معادلات الدرجة الثانية .

ب - الحل العام لمعادلات الدرجة الثالثة .

ج - إدخال وتوسيع الرمزية الجبرية .

ويقترن الحدث الأول عندهم غالبا بالخوارزمي ، ويقترن الحدث الثاني برياضي المدرسة الإيطالية في القرن السادس عشر ، ويرتبط الحدث الثالث بأسمى فيت " وديكارت .

يحدث هذا بينما برهنت أعمال وبيل حول الكرخي والخيام في القرن التاسع عشر ومؤخرا أعمال لوكي عن الكاشي أن الصورة السابقة غير دقيقة ومغلوبة إلى حد كبير إذ كشف الأول من خلال ترجمته لجبر الخيام بصورة خاصة أنه قبل القرن السادس عشر بكثير حققت نظرية معادلات الدرجة الثالثة تقدما كبيرا على يد الخيام ، كما يستشف عن أعمال وبيك ولوكي أنه لا يمكن كتابة تاريخ الجبر بمعزل عن الحساب الجبري المجرد .

إن الناظر في كتاب الخيام في الجبر سوف يجد أنه يؤكد على مسألتين :

١ - أنه لم يصلنا من اليونانيين أي شيء يتعلق بحل معادلات الدرجة الثالثة . وإذا كان أرشميدس قد طرح مسألة هندسية يمكن ردها إلى معادلة من الدرجة الثالثة فإنه لم يستطع لا هو ولا شارحوه صياغة هذه المسألة بطريقة جبرية . والذي قام بهذه المهمة هو الماهاني كما أن الحل يعود إلى أبو جعفر الخازن بإستخدام طريقة القطاعات المخروطية .

٢ - أن علينا أن نميز بين حل مسألة معينة من الدرجة الثالثة وبين إعداد منهجية عامة لحل معادلات الدرجة الثالثة) وهذا ما فعله الخيام في كتابه "الجبر"

وأخيرا فإن تاريخ الإستنتاج الرياضى - عند الأوربيين
المحدثين - يعود فى رأيهم إلى القرن السابع عشر الميلادى
وينسبونه فى الأساس إلى باسكال الذى يسمونه "المكتشف الأول
للإستنتاج الرياضى"، بينما كما أوضحنا من قبل أن الكرخى ومن
بعده السموال هما أول من صاغوا هذه الطريقة فى البرهان
(حتى ولو لم تسم بهذا الأسم) وأنهما بإستخدامها قد إستطاعا إيجاد

مجموع المتواليات الحسابية $\frac{n}{1} s, \frac{n}{1} s, \frac{n}{1} s$

وفي الصفحات المقبلة سوف نعرض لبعض الرياضيين البارزين في الحضارة العربية الإسلامية وبعض إنتاجهم وبراهينهم ، وإن كنا سنقتصر على عدد محدود منهم لأن زمن هذا المقرر لا يتسع لغير ذلك .

(٧)

الحضارة العربية الإسلامية (يتبع)

(١) الخوارزمي

محمد بن موسى الخوارزمي ، من عائلة ثرية (بنو موسى) ، خدم الخليفة المأمون كما إرتبط بخليفة لاحق هو الواثق (٨٤٢ - ٨٤٧ م) بالقصة التالية التي أوردها الطبري . فالظاهر أنه عندما مرض الواثق مرضا خطيرا طلب من الخوارزمي أن يتنبأ له أن كان سيعيش أم سيموت . ولقد أكد له الخوارزمي أنه سوف يعيش خمسين سنة أخرى . لكن الواثق مات بعد عشرة أيام ، وربما ذكر الطبري هذه القصة في كتابه (تاريخ الرسل والملوك) ليبرهن على أنه حتى العلماء العظام يمكن أن يقعوا في الخطأ ، وربما أيضا ذكرها الطبري كدليل على حصافة الخوارزمي السياسية .

وللخوارزمي مساهمات أساسية في أربعة ميادين : في الحساب والجبر والجغرافيا والفلك ، ففي الحساب والفلك أدخل الخوارزمي الطرق الهندية في العالم الإسلامي ، بينما كان كتابه في الجبر ذا أهمية أساسية في تطوير هذا العلم . وأخيرا فإن منجزاته في الجغرافيا تمنحه مكانا مرموقا بين الأساتذة القدامى لهذا العلم .

وكتابه فى الحساب (كتاب الجمع والطرح وفق الحساب الهندى)
أدخل النظام العشرى الذى طوره الهنود فى القرن السادس ، بالإضافة إلى
إستخدام الصفر الذى جعل هذا النظام المستعمل حتى اليوم مناسباً جداً .
وكتابه فى الحساب كان أول كتاب يترجم إلى اللاتينية فى القرون الوسطى
ويتضح تأثيره على رياضيات الغرب من حقيقة اشتقاق كلمة Algorithm .
فهذه الكلمة تستخدم اليوم للتعبير عن أى طريقة محددة لحساب شئ ما ،
وهى تحوير لإسم الخوارزمى .

ولقد كان لكتاب الخوارزمى فى الحساب أهمية فائقة فى رياضيات
الحضارة العربية الإسلامية ، إذ وفر للرياضيين المسلمين أداة سهلة
أستخدمت باستمرار منذ أوائل القرن التاسع . ومن كتاب أحمد الأقليديسى
المكتوب حتى ٩٥٠ م إلى البحث الموسوعى لجمشيد الكاشى (مفتاح
الحاسبين) فى عام ١٤٢٣ م كان النظام العشرى نظاماً عاماً للحساب فى
الحضارة العربية الإسلامية ، وخلال قرن أو أكثر قليلاً أدت دراسة الخوارزمى
إلى إختراع الكسور العشرية ، وإستخدمت من جانب رياضيين مثل السموئل
بن يحيى (بالمغرب) فى القرن الثانى عشر لإيجاد جذور الأعداد ، ومن
جانب الكاشى فى القرن الخامس عشر لإيجاد قيمة ط صحيحة لسته عشر رقم
عشرى :

أما عمله المشهور الآخر فهو كتاب (الجبر والمقابلة) الذى أهده
للمأمون وهذا الكتاب أصبح نقطة البداية فى موضوع الجبر عند الرياضيين
الإسلاميين ، كما أنه أعطى هذا العلم عنوانه المستخدم حتى يوم فى الغرب

Algebra . ولقد كان الحافز إلى تأليف هذا الكتاب هو تطبيق العلم على قوانين الشريعة لحل المشاكل الناجمة عن قانون الإرث الإسلامى ، فجزء كبير من الكتاب مخصص لهذه المشاكل . وهكذا أصبح كتاب الخوارزمى فى الجبر والمقابلة نموذجا للكتب التى جاءت بعده فى الجبر . فنجد مثلا ان كتاب أبو الكامل - المعروف بإسم الحاسب المصرى - يتضمن أيضا تطبيقات علم الجبر على مسائل المواريث .

وفى كتاب الخوارزمى تستخدم كلمتا " الجبر " و " المقابلة " بالمعنى التالى :

إذا كانت لدينا المعادلة $5س + 1 = 2 - 3س$ وإستبدلناها بالمعادلة

$$8س + 1 = 2$$

فإننا نكون قد " جبرنا " طرفى المعادلة بإضافة 3س إلى كل منهما .

أما المقابلة فهى إستبدال المعادلة $8س + 1 = 2$ بالمعادلة

$$8س = 1 ، \text{ أى طرحنا العدد } 1 \text{ من الطرفين}$$

وبالطبع فلم يستخدم الخوارزمى الرموز س ، س² ... إلخ كما

نستخدمها اليوم ، وإنما كان يستخدم كلمة " جذر " أو " شئ " للتعبير عن

س ، وكلمة " مال " للتعبير عن س² . فيقال مثلا :

مالان وعشرة جذور تعدل ثمانية وأربعون درهما .

$$\text{وهى بلغتنا الجبرية الحديثة} \quad 2س^2 + 10س = 48$$

ويحل الخوارزمى المسألة لفظيا كما يلى :

ترد المالين إلى مال واحد . وقد علمت أن مالا من مالين نصفهما .
فأردد كل شئ في المسألة إلى نصفه ، فكانه قال : مال وخمسة جذور يعدل
أربعة وعشرين درهما . أي بلغتنا الحديثة

$$س^2 + ٥س = ٢٤$$

والغريب أن الخوارزمي كان يعرف الصيغة الجبرية للحل كما يتضح من قوله
التالي :

ننصف الجذور فتكون إثنين ونصف ، وماله $\frac{٢٥}{٤}$ وإذا أضيف إلى
الأربعة والعشرين درهما نحصل على $\frac{١٢١}{٤}$ وجذره $\frac{١١}{٢}$. وإذا ما أخذ من
هذا إثنين ونصف يبقى ثلاثة وماله تسعة . ومعنى هذا أن الخوارزمي قد حل
لفظيا المسألة بالصورة التالية :

$$س^2 + ب س = جـ$$

$$س = \frac{ب}{٢} - \sqrt{ج + \left(\frac{ب}{٢}\right)^2}$$

$$٣ = \frac{٥}{٢} - \frac{١١}{٢} = \frac{٥}{٢} - \sqrt{\frac{١٢١}{٤}} = \frac{٥}{٢} - \sqrt{٢٤ + \left(\frac{٥}{٢}\right)^2} =$$

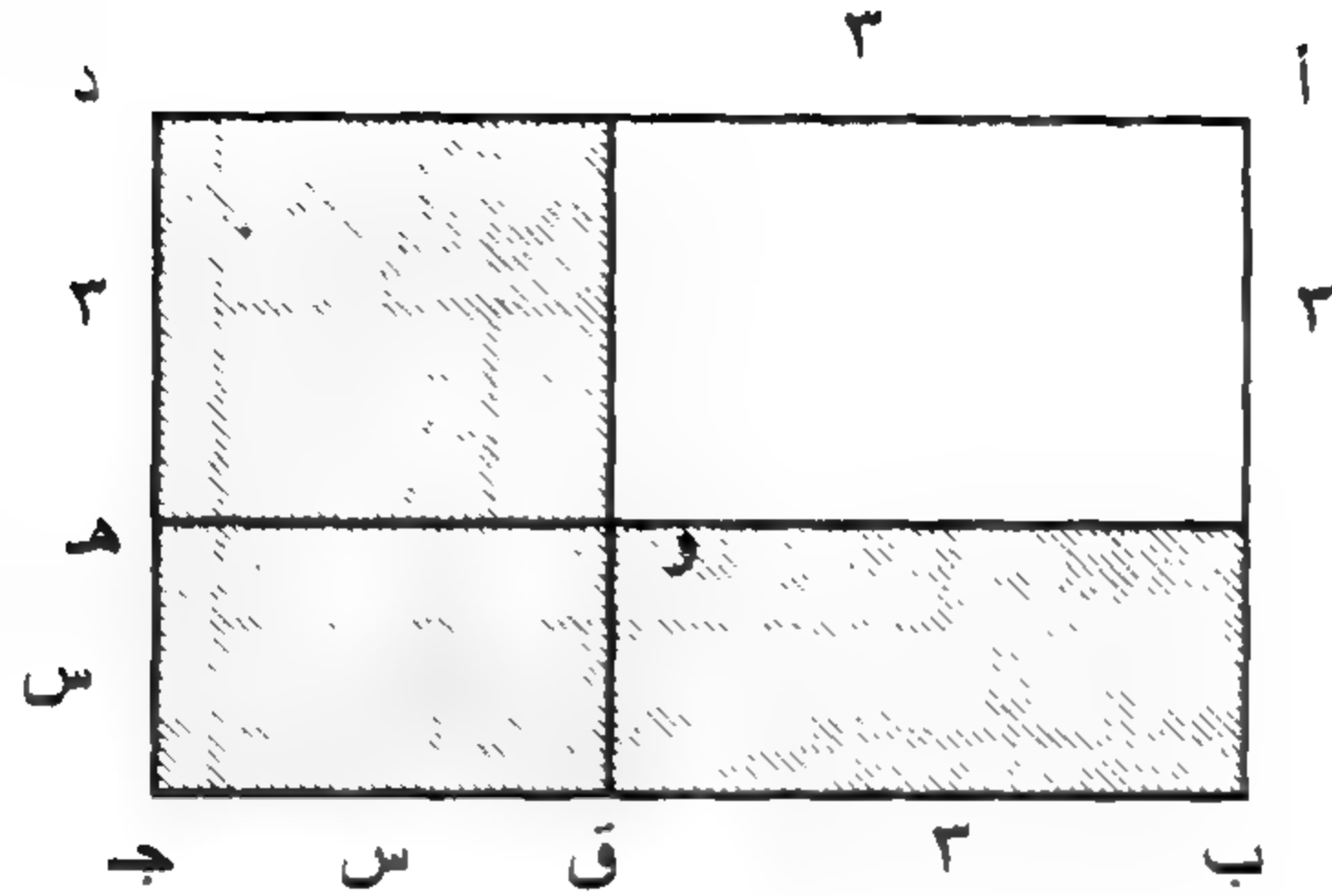
وسنلاحظ هنا أن الخوارزمي أهمل الحل السالب وهو $س = -٨$
لأنه لا معنى للسالب في مسائل المواريث .

ومع ذلك فإن الخوارزمي - متأثرا في هذا بإقليدس - لم يكن يعتبر
هذا حلا للمسألة ، وأن البرهان الحقيقي هو البرهان الهندسي .

وإليك بعض الأمثلة التي تشرح طريقة البرهان الهندسي عند

الخوارزمي

مثال (١) حل المعادلة $س^2 + ٦س = ٧$



(أ) إرسم مربعا طول ضلعه مجهول س مثل وق ج د هـ

(ب) نصف الجذور (٦ س) أي $٣ = \frac{٦}{٢}$

(ج) مد أضلاع المربع في إتجاه ب، د بطول قدره ٣ فنحصل على

المربع أ ب ج د وطول ضلعه س + ٣

(د) مساحة المربع أ ب ج د = مساحة الشكل المظلل + مربع مساحته ٩

وحيث أن مساحة الشكل المظلل هي $س^2 + ٦س$ أي ٧

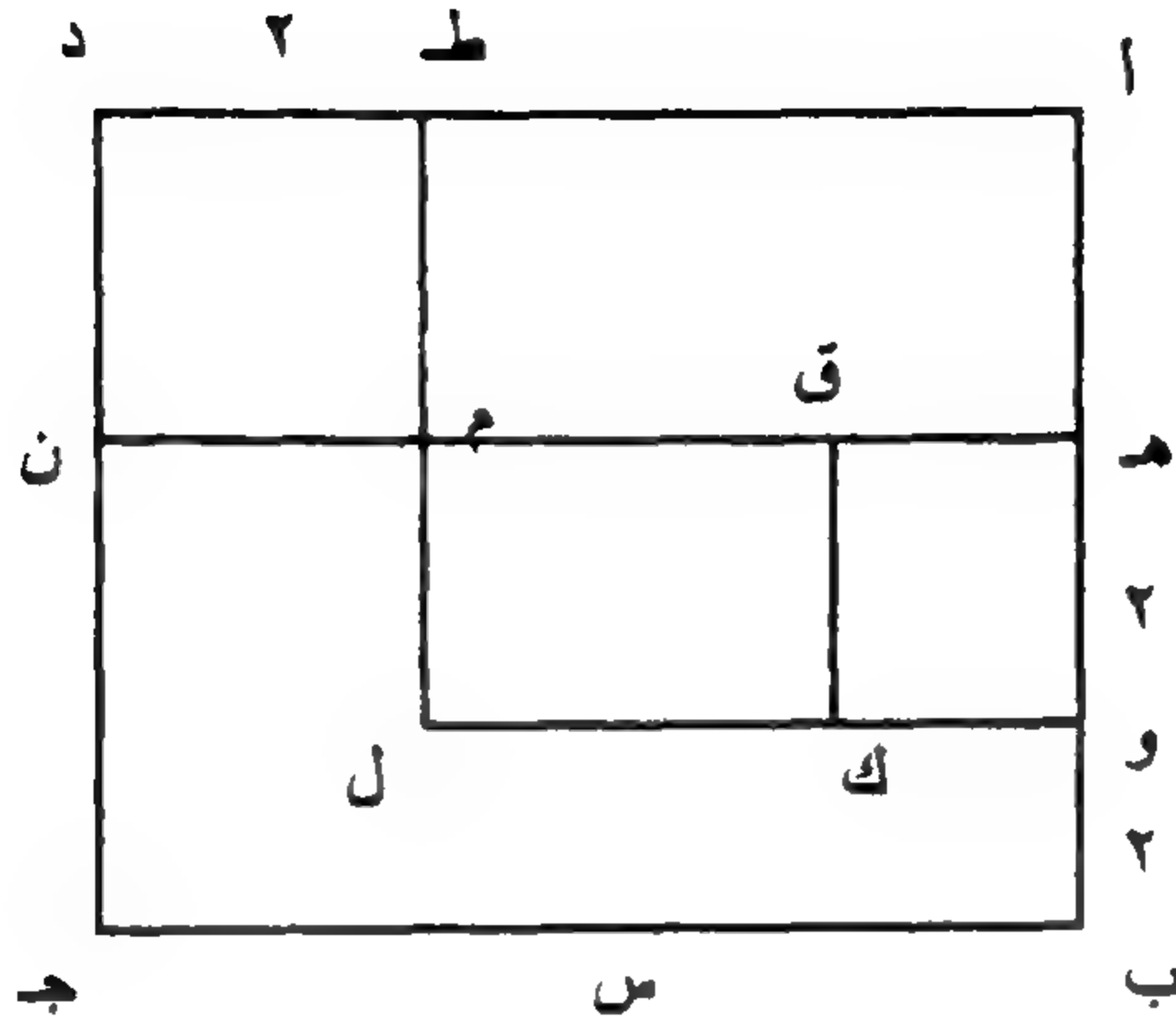
إذن مساحة المربع أ ب ج د = $٧ + ٩ = ١٦$.

أي أن س + ٣ = ٤

أي أن س = ١

(٢) هذا صنف آخر من معادلات الدرجة الثانية

$$س^2 = ٤س + ٥$$



(أ) إرسم المربع أ ب ج د ومساحة $س^2$ أى أن طول ضلعه مجهول وليكن س

(ب) خذ نقطة هـ على أ ب بحيث أن ب هـ = ٤ (معامل س)
نصف ب هـ فى و فيكون و هـ = ٢

(ج) إرسم المربع هـ و ك ق فتكون مساحته = ٤

(د) مد و ك إلى ل بحيث ك ل = أ هـ ثم أكمل المستطيل ق ك ل م

مساحة المستطيل ق ك ل م = مساحة المستطيل ط م ن

د

لأن ك ل = أ هـ (عملا) = ط م

ولأن أ و = و ل أى أن أ و ل ط مربع

وإذن ط د = و ب = ٢

(و) مساحة المستطيل هـ ب ج ن = ٤ س ، ومساحة المربع أ ب جـ

د = س^٢

إذن مساحة المستطيل أ هـ ن د = ٥

ولكن مساحة المستطيل أ هـ ن د = مساحة المستطيل

أ هـ م ط + مساحة ط م ن د = مساحة أ هـ م ط + مساحة ق ك ل م

إذن مساحة المربع أ و ل ط = ٥ + ٤ = ٩

أ و = ٣

إذن أ ب = ٥ أى أن

س = ٥

وأخيرا فإن من أهم الملاحظات التى تذكر عن كتاب الخوارزمى (

الجبر والمقابلة) أنه حاول أن يعالج مسألة معادلات الدرجة الثانية معالجة

منهجية فقسم هذه المعادلات إلى خمسة أصناف مثل قوله أموال وجدور

تعدل عددا

(مثل س^٢ + ٦ س = ٧)

أو أموال تعدل جدورا وعددا (مثل س^٢ = ٤ س + ٥) وهكذا

(٢) عمر الخيام

لا بد أن يكون عمر الخيام هو الرياضي المشهور في هذا العالم الذي سميت باسمه نوادي اللهو ويعود هذا إلى الأشعار المنسوبة له والمعروفة باسمه (رباعيات الخيام) والمترجمة إلى عديد من لغات العالم . وفي الغرب نجد أن عمر الخيام معروف كشاعر أكثر منه رياضيا ، وقد كان فيتر جرال د أول من ترجم رباعياته إلى الإنجليزية . ومع ذلك فمساهماته في الرياضيات والفلك كانت من الدرجة الأولى .

ولد الخيام في نيسابور في منطقة هي جزء من إيران اليوم وإن عرفت آنذاك باسم خراسان حوالي ١٠٤٨ ، أي في أوائل القرن الحادي عشر وفي زمن كان الأتراك السلاجقة يحكمون خراسان وكانت مدنها الرئيسية هي نيسابور ، بلخ ، مرو ، طوس ... إلخ .

ولقب الخيام يشير إلى أنه هو أو أبوه مارس صناعة الخيام يوما ما . ولقد أظهر إهتماما مبكرا بالعلوم الرياضية ، لكننا لا نعرف غير هذا عن مرحلة شبابه وهناك قصة بأنه زامل في المدرسة تلميذا عرف باسم نظام الملك وأصبح وزيرا في بلاط الملك ملكشاه ، وأنهما إتفقا على أن من يحصل منهما على منصب عال يساعد الآخر .

لكن هذه القصة لا تدعمها تواريخ حياة الرجلين فمعظم الباحثين يتفقون على أن الخيام مات عام ١١٣١ ، بحيث أنه لو كان زميلا في الدراسة

حقا لنظام الملك فلايد أن عمره كان ١٥٠ سنة عندما مات ، وهو أمر غير مرجح بالمرة .

ونحن نعرف أنه فى عام ١٠٧٠ م عندما كتب كتابه العظيم فى الجبر كان يدعمه فى هذا العمل قاضى قضاة سمرقند ابو طاهر . وفى هذا الكتاب درس الخيام بشكل منهجى كل أنواع معادلات الدرجة الثالثة وإستخدم القطاعات المخروطية لإيجاد جذور هذه المعادلات كأطوال قطع مستقيمة هى مساقط لنقط تقاطع هذه المنحنيات (سنشرح ذلك فيما بعد) .

وهناك قرائن على أن الخيام حاول أن يحصل على صيغة جبرية لتلك الجذور ولم ينجح ، ولذا كتب فى كتابه (الجبر) .

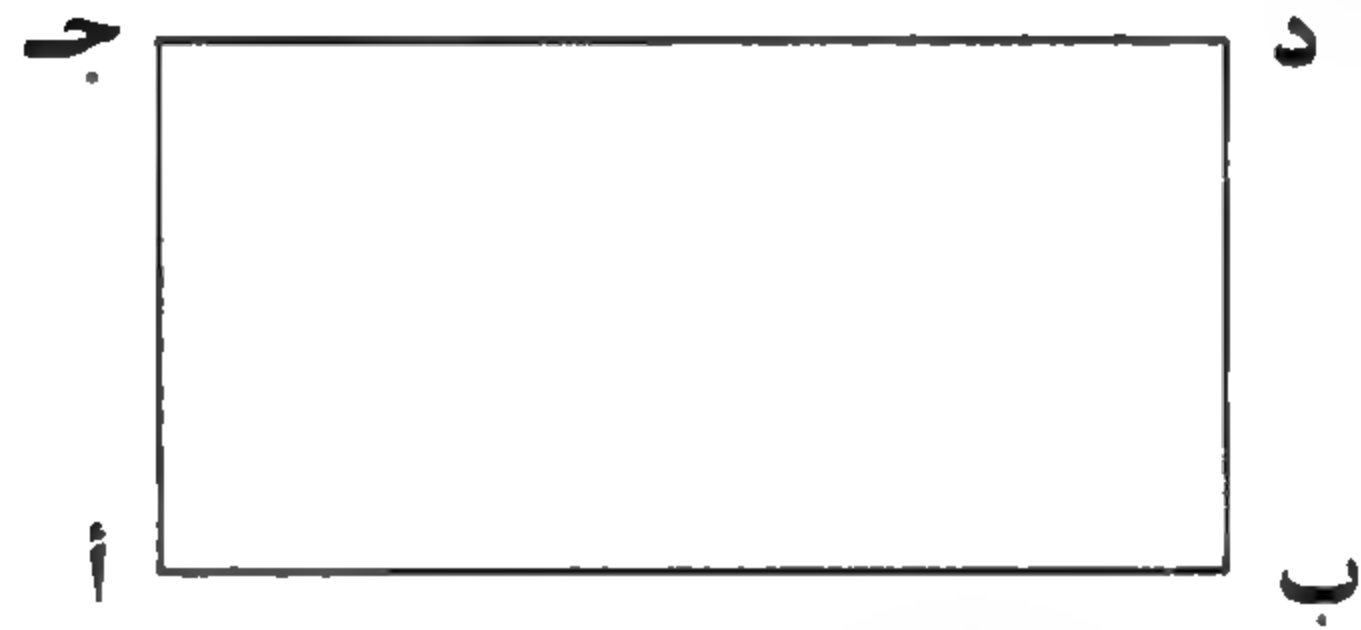
" لقد حاولت التعبير عن هذه الجذور بالجبر لكنى لم أنجح ، وربما ينجح فى ذلك رجال يأتون بعدنا "

وعظمة هذه الفقرة الأخيرة تتمثل فى إعرافها باستمرارية تقاليد البحث العلمى حتى بعد موت الباحث وهى بذلك تكشف عن رجل متواضع واسع الأفق ومتحضر .

وخلال الفترة ١٠٧٠ - ١٠٨٠ ذهب الخيام إلى أصفهان حيث أقام بها لمدة ١٨ عاما وذلك بدعم من حاكمها ملكشاه ووزيره نظام الدين حيث أشرف على برنامج للبحوث الفلكية فى مرصد بناه له ملكشاه . وبسبب هذا استطاع أن يقدم خطة لإصلاح التقويم الذى كان قائما آنذاك ، وتتمثل خطة الخيام فى جعل ثمان سنوات (من ٣٣ سنة) كبيسة أى أن طولها ٣٦٦ يوم .

وبذلك أنتج الخيام طولا للسنة أقرب للحقيقة من الرقم الذى نستخدمه اليوم لطول السنة فى التقويم الجريجورى .

ومن أعمال الخيام الهامة بحثه " تفسير لمصادرات إقليدس " وهو عمل كتب ١٠٧٧ م أى قبل تقديم إصلاحه التقويمى بعامين . وفى هذا البحث يعالج الخيام قضيتين شديدتى الأهمية فى أسس الهندسة ... إحداهما التى عالجها ثابت بن قرّة وابن الهيثم وتتعلق بالمصادرة الخامسة أى مصادرة التوازي .



إن الخيام يؤسس تحليله على الشكل الرباعى أ ب ج د حيث ج أ ، د ب متساويان وكل منهما عمودى على أ ب . وهو يدرك أنه لكى يوضح أن مسلمة التوازي تستنتج من المسلمات الأربعة الأخرى فيكفى برهان أن الزوايا الداخلة عنه ج ، د هى زوايا قائمة ، الأمر الذى يؤدى إلى وجود مستطيل .

أما المسألة الأخرى التى عالجها الخيام فى مناقشته لمشاكل مصادرات إقليدس فهى مسألة النسب . هنا نجد إنجازات الخيام من ناحيتين: إحداهما إثبات أن تعريف النسبة كما فصلت فى الرياضيات الإسلامية يتكافئ مع تعريف إقليدس .

والآخر إقتراحه أن مفهوم العدد فى حاجة إلى توسيع لىتضمن نوعا جديدا من الأعداد وهو النسب . فمثلا فى رأى الخيام أن النسبة بين طول قطر المربع و ضلعه ($\sqrt{2}$) أو نسبة طول محيط الدائرة إلى قطرها (ط) يجب أن ينظر إليها كأعداد جديدة .

إن هذه الفكرة العامة فى الرياضيات ترقى إلى فكرة تقديم فضاء الأعداد الحقيقية الموجبة بحيث يشمل الأعداد النسبية والأعداد غير النسبية، ومثل مصادرة التوازى فقد نقلها نصير الدين الطوسى فى كتابه إلى الرياضيين الأوربيين .

.....

قال الخيام لأحد أصدقائه أنه يريد عندما يموت أن يدفن فى أصفهان حيث تهب الريح برائحة الورد فوق قبره . وقد تحققت رغبته فى مقبرة الرياضى العبرى الفذ هناك ، وهى قائمة حتى اليوم .

(٨)

من أعمال الخيام الرياضية : حل معادلات الدرجة الثالثة بيانيا
قام الخيام بتطبيق معادلات الدرجة الثالثة كما فعل
الخوارزمي في معادلات الدرجة الثانية وفق موقع معاملات قوى
المجهول س ، ومن ثم إختيار القطعين الملائمين للمعادلة . فمثلا في
المعادلة

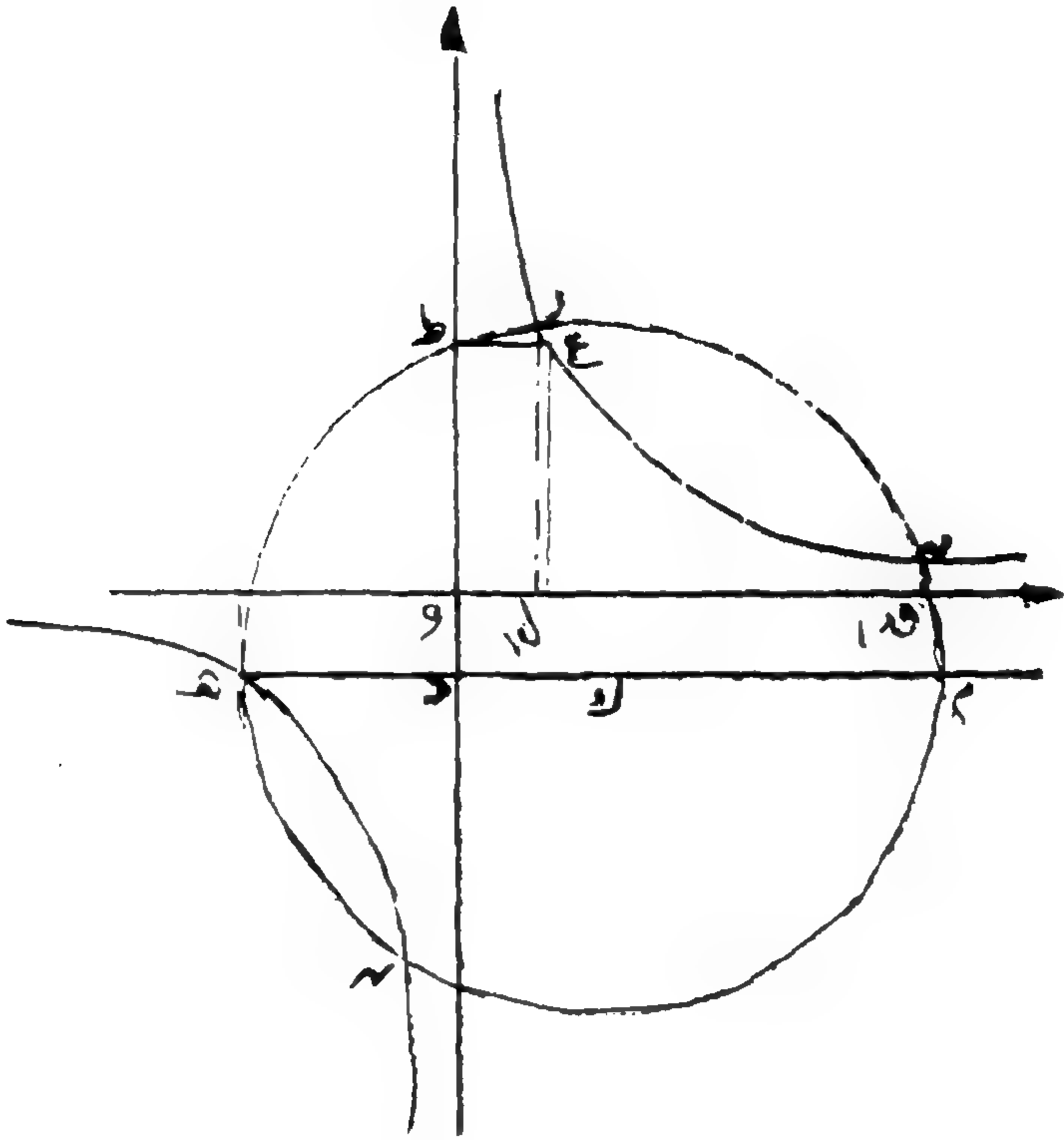
$$س^3 + ب^3 س + أ^3 = ج س^2 \quad (١)$$

يلجأ إلى إستخدام تقاطع الدائرة مع القطع الزائد ،
ويستخدم الهندسة في البرهان على طريقة إقليدس على النحو
التالى :

(١) نرسم محورين متعامدين أحدهما أفقى والآخر رأسى

يتقاطعان فى نقطة و . و نأخذ د = ب ، هـ د = $\frac{أ^3}{ب}$ ، د م = ج

(٢) نرسم دائرة قطرها هـ م ومركزها ك



(٣) من خواص الدائرة نجد أن $\overline{طد} = ده \times م = \frac{٣}{٢} \times ج$

$$\overline{طد} = \frac{١}{ب} \sqrt{ب}$$

(٤) نرسم ط ع موازيا للمحور الأفقي بحيث أن

$$\overline{ع ط} \times ط و$$

$$= ده \times د و$$

$$\frac{٣}{ب} = ب \times \frac{٣}{٢} =$$

(٥) نرسم قطعاً زائداً معادلة $\frac{3_1}{ب} = ص$ وتقارباً هـ

المحورين الأفقي والرأسي. من الواضح أن هذا القطع الزائد يمر بالنقطتين ع ، هـ (بسبب تساوى المستطيلين حيث أن مساحة كل منهما $\frac{3_1}{ب}$ ، أى أن إحداثيات النقطة

ع ، وإحداثيات النقطة هـ تحققان $\frac{3_1}{ب} = ص$.)

(٦) نسقط من نقطتي تقاطع الدائرة والقطع الزائد ل ، ق عمودين على المحور الأفقي فيقابلاه في ق_١ ، ل_١ على التوالي ، وسنبرهن أن ول_١ ، وق_١ هما حلان للمعادلة (١) إذن الحلول الموجبة لمعادلة (١) هما ول_١ ، وق_١ وهذا ما نعنيه بالحلول البيانية

البرهان : إن إحداثيات مركز الدائرة هي $\left[\frac{1}{2} (ج - \frac{3_1}{ب}) ، -ب \right]$

لأن قطر الدائرة هو د هـ + د م = ج + $\frac{3_1}{ب}$

ك د = م د - م ك = ج - $\frac{1}{2} (ج + \frac{3_1}{ب})$

$$\frac{1}{2} = \left(\frac{3}{2} - \text{ج} \right) \frac{1}{2} = \text{دو} = \text{ب}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} + \text{ج} \right) \text{ب}$$

ونصف قطر الدائرة هو

إذن معادلة الدائرة هي

$$[\text{س} - \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - \text{ج} \right)]^2 + [\text{ص} + \text{ب}]^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2} + \text{ج} \right) \text{ب}$$

وبالفعل يمكن تبسيط هذه المعادلة إلى

$$\text{س}^2 + \text{ص}^2 - \text{س} \left(\frac{3}{2} - \text{ج} \right) + 2 \text{ب} \text{ص} + \text{ب}^2 - \text{ج} \frac{3}{2} \text{ب} = \text{صفر}$$

إذن لإيجاد نقط التقاطع بين الدائرة والقطع الزائدة

نعوض في معادلة الدائرة عن معادلة القطع الزائد أى

$$\text{س}^2 + \left(\frac{3}{\text{س}} \right)^2 - \text{س} \left(\frac{3}{2} - \text{ج} \right) + 2 \text{ب} \left(\frac{3}{\text{س}} \right) + \text{ب}^2 - \text{ج} \frac{3}{2} \text{ب} = \text{صفر}$$

$$+ \text{ب}^2 - \text{ج} \frac{3}{2} \text{ب} = \text{صفر}$$

أى

$$\text{س}^4 - \left(\frac{3}{2} - \text{ج} \right) \text{س}^3 + \left(\text{ب}^2 - \text{ج} \frac{3}{2} \text{ب} \right) \text{س}^2 - 2 \text{ب}^3 \text{س} + 3 \text{ب}^4 = 0$$

$$+ \frac{1}{2} = \text{صفر}$$

وحيث أن النقطة هـ هي نقطة تقاطع وإحداثياتها هي

$$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right), \text{ فلا بد أن تكون } s + \frac{1}{2} = 0 \text{ هو عامل تحليل في}$$

المعادلة السابقة ، والتي يمكن كتابتها على النحو التالي :

$$(s + \frac{1}{2})(s^3 - js^2 + bs^2 + a^3) = 0$$

وإذن نقط التقاطع الثلاث الأخرى (غير هـ) تحقق المعادلة .

$$s^3 - js^2 + bs^2 + a^3 = 0 \text{ أو}$$

$$s^3 + bs^2 + a^3 = js^2$$

وهذه المعادلة هي (١) الأصلية

نلاحظ أخيرا أن الخيام تجاهل الجذر السالب الذي تمثله النقطة هـ

حول معادلات الدرجة الرابعة :

في الحقيقة يمكن إستخدام طريقة الخيام لحل معادلات الدرجة

الرابعة كما يلي :

إعتبر المعادلة

$$(2) \quad s^4 + as^3 + bs^2 + js + d = 0$$

حيث ا ، ب ، ج ، د أعداد حقيقية

سوف نلاحظ أن إشارة د ستحدد ما إذا كانت الحلول تأتي نتيجة تقاطع قطعين زائدين قائمين أو تقاطع دائرة مع قطع زائد. إذ

بقسمة طرفي المعادلة (٢) على s^2 نجد

$$s^2 + أس + ب + \frac{ج}{s} + \frac{د}{s^2} = \text{صفر}$$

وإذا عوضنا عن s^{-1} بمضاعف للمتغير ص نجد أن الحد الأخير يصبح $+ ص^1$ أو $- ص^1$ حسب إشارة د.

$$\text{فإذا كانت د موجبة نأخذ } \frac{\sqrt{د}}{s} \text{ أي } \frac{د}{s^2} = ص^2$$

وفي هذه الحالة نجد حالة تقاطع دائرة مع قطع زائد

$$\text{وإذا كانت د سالبة نأخذ } \frac{\sqrt{د-}}{s}, \text{ وفي هذه الحالة } \frac{د}{s^2} = - ص^2$$

وفي هذه الحالة نأخذ تقاطع قطعين زائدين

الحالة الأولى: د < ٠

ضع $د = ه^2$ وأقسم المعادلة على s^2

$$s^2 + أس + ب + ج + ه^2 = ٠$$

ضع $ص = ه s^{-1}$ أي $س ص = ه$ فنحصل على

$$س^2 + أس + ب + ه + ص = ٠$$

$$\text{اي} \quad (س + \frac{1}{2})' + (ص + \frac{ج}{2})' = \frac{1}{4} + \frac{ج}{2} - ب$$

$$\text{وهذه دائرة بشرط ان } \frac{1}{4} + \frac{ج}{2} - ب < 0.$$

وفي هذه الحالة فالجذور الحقيقية للمعادلة من الدرجة الرابعة .

$$س' + أ'س' + ب'س' + ج'س' + د' = 0$$

$$\text{هي نتج من تقاطع الدائرة } (س + \frac{1}{2})' + (ص + \frac{ج}{2})' = \frac{1}{4} + \frac{ج}{2} - ب$$

$$\frac{ج}{2} - ب$$

$$س ص = \sqrt{د} = هـ$$

مع القطع الزائد

مثال : اعتبر المعادلة

$$س' + 2س' - 13س' - 14س + 24 = 0$$

$$1 = 2, 2 = 13, 14 = -13, 24 = د, بالتالي هـ = \sqrt{2} = \sqrt{6}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{ج}{2} - ب = 13 + \frac{196}{96}$$

$$\frac{13 \times 24 + 49 + 24}{24} = \frac{96 \times 13 + 196 + 96}{96} =$$

$$< \frac{385}{24} = \frac{312 + 49 + 24}{24} =$$

إذن حل المعادلة من الدرجة الرابعة السابق ذكرها هي

ثمرة تقاطع الدائرة

$$\frac{385}{24} = {}^2\left(\frac{\sqrt{6} \gamma}{12} - \text{ص}\right) + {}^2(1 + \text{س})$$

مع القطع الزائد $\text{س} \text{ ص} = 2\sqrt{6}$

وبرسم الشكل يمكن أن نتحقق أن مساقط نقط التقاطع ، أى الجذور

هي -٤، -٢، ١، ٣.

أما إذا كانت $\frac{{}^2\text{أ}}{4} + \frac{{}^2\text{ج}}{2\text{هـ}} - \text{ب} > 0$ فإن ما سلف لا يكون

دائرة ، ولن تكون هناك جذور حقيقية ، وإذا كانت

$\text{ب} = \frac{{}^2\text{أ}}{4} + \frac{{}^2\text{ج}}{2\text{هـ}}$ فإن الدائرة تتحول إلى نقطة ولا تكون هناك

جذور حقيقية .

الحالة الثانية : إذا كان $\text{د} > 0$ نضع $\text{د} = -\text{هـ}^2$

وإذن

$$\text{س}^4 + \text{أ}^2\text{س}^2 + \text{ب}^2\text{س} + \text{ج}^2\text{س} - \text{هـ}^2 = 0$$

بالقسمة على س^2 نحصل على

$$\text{س}^2 + \text{أ}^2\text{س} + \text{ب} + \text{ج}^2\text{س}^{-1} - \text{هـ}^2\text{س}^{-2} = 0$$

وبوضع $\text{ص} = \text{هـ}^2\text{س}^{-1}$ نجد أن

$$س^1 + أس + ب + جص - ص^1 = ٠$$

$$أو (س + \frac{1}{٢}) - (ص - \frac{ج}{٢}) = \frac{١}{٤} - \frac{ب}{٤} - \frac{ص^1}{٤}$$

$$فإذا كانت \frac{١}{٤} - \frac{ب}{٤} - \frac{ص^1}{٤} < ٠$$

فإن الحلول تكون ثمرة تقاطع القطع الزائد القائم

$$(س + \frac{1}{٢}) - (ص - \frac{ج}{٢}) = \frac{١}{٤} - \frac{ب}{٤} - \frac{ص^1}{٤}$$

مع القطع الزائد

$$س ص = هـ$$

مثال: إدرس المعادلة $س^4 + س^3 - س^2 - س^3 + س^2 - س - ٤ = ٠$

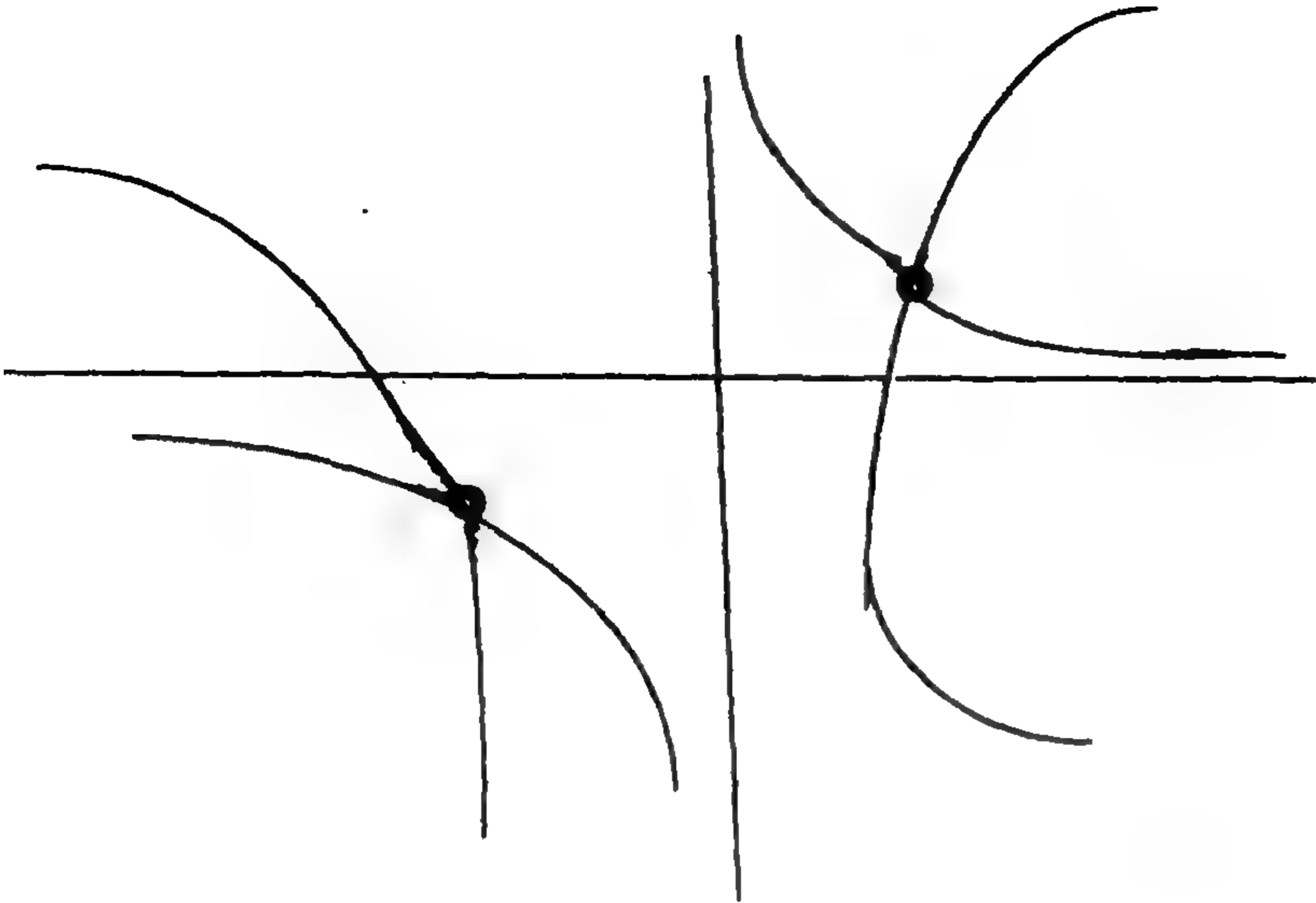
$$أ = ٣ + ، ب = ٣ - ، ج = ٣ ، د = ٤ - ، أي هـ = ٢$$

$$\frac{٧٥}{١٦} = ٣ + \frac{٩}{١٦} - \frac{٩}{٤} = ب - \frac{ج}{٤} - \frac{أ}{٤}$$

$$\frac{٧٥}{١٦} = (س + \frac{٣}{٢}) - (ص - \frac{٣}{٤})$$

$$س ص = ٢$$

على القطع



أما إذا كان $\frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4} > 0$

فإن معادلة القطع الزائد تتحول إلى

$$\left(\frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4} \right) = \left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} \right) \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)$$

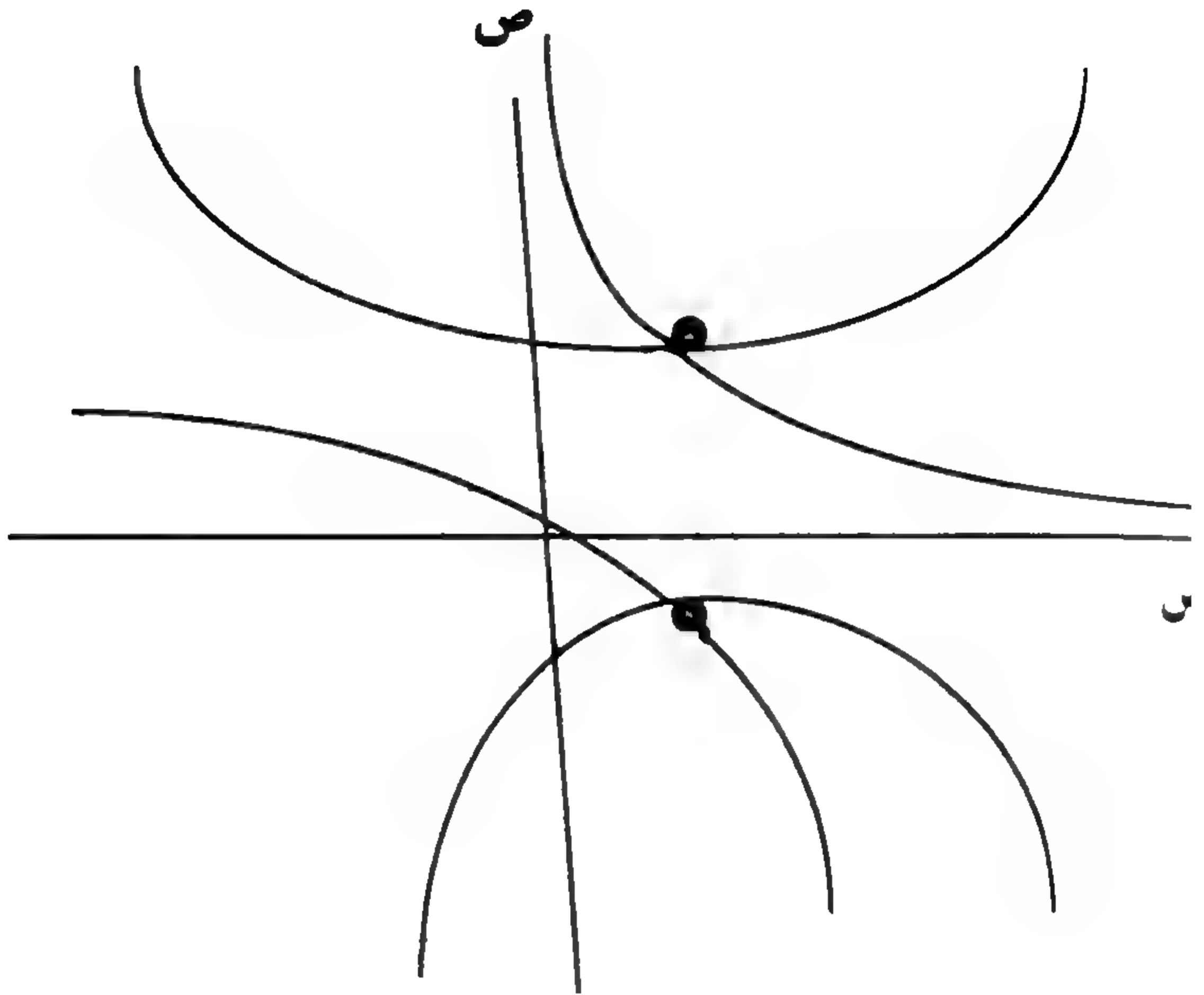
وتقاطع مع القطع $s = v$ هو الحل

$$\text{مثال: } s^2 + 4s + 5s + 1 = 0$$

$$\text{هنا نجد } \frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{5}{4} = \left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} \right) \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)$$

مع $s = 1$



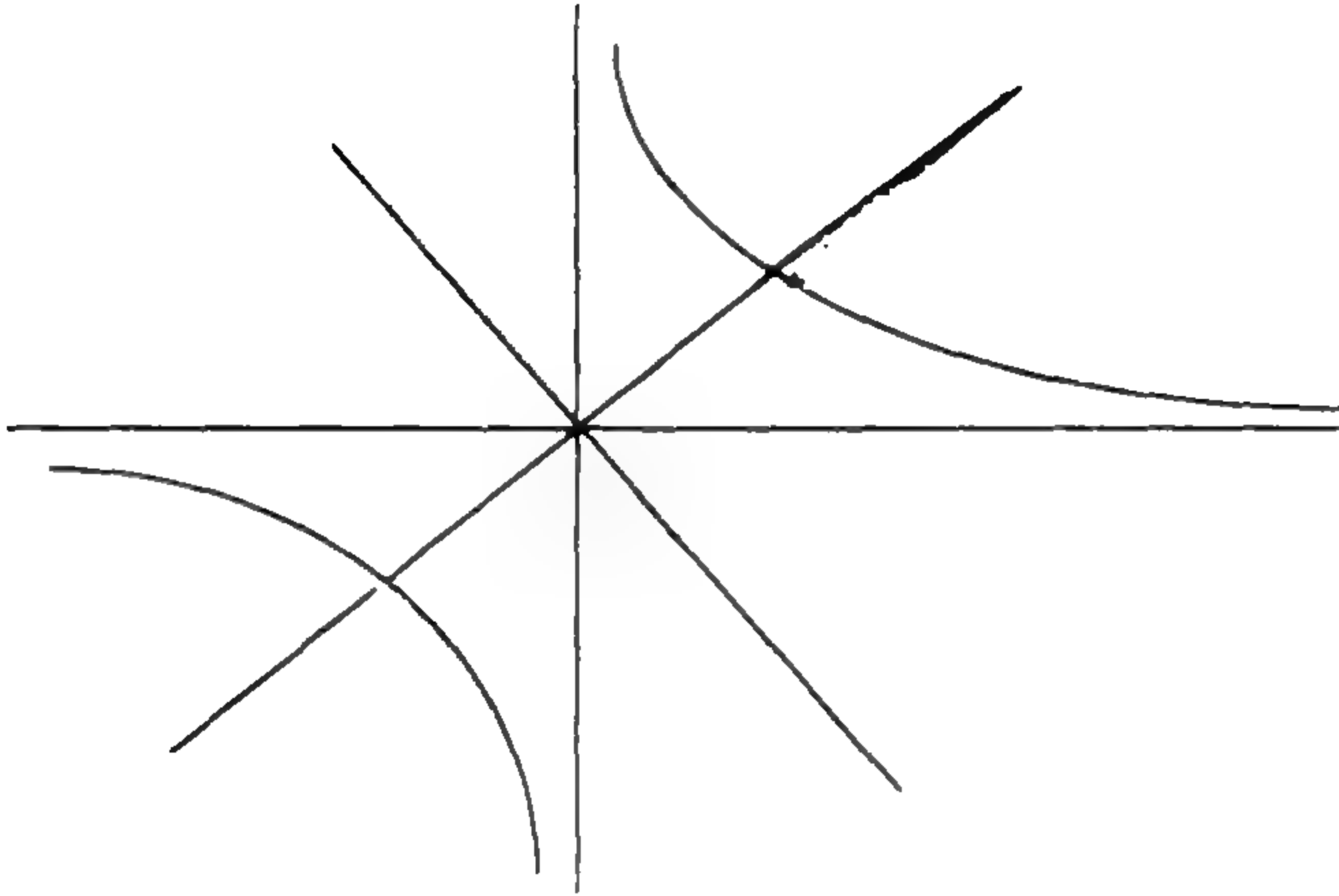
أما إذا كانت $\frac{1}{4} - \frac{j^2}{4h} - b = 0$

فإن الحل يأتي من تقاطع المستقيين $ص - \frac{j}{h} = s + \frac{1}{2}$ ، $ص = 0$

$$- \frac{j}{h} = (s + \frac{1}{2})$$

على القطع الزائد $s = ص = h$

مثال: حل المعادلة $s^4 - 1 = 0$ الحل هو نتيجة تقاطع المستقيمين $s = ص$ ، $s = -ص$ مع القطع الزائد $s = 1 = ا$



تبسيط طريقة الخيام: يمكن تبسيط طريقة الخيام في الحل لمعادلات الدرجة الثالثة بدراسة المعادلة

$$s^3 + أس^2 = ب \quad (1) \quad ا < 0, ب < 0$$

وذلك بالتخلص من الحد الذي يحتوى على s^2 . ويمكن دائما عمل ذلك بتعويض مناسب . فمثلا المعادلة

$s^3 + أس^2 + ب s = ج$ يمكن تحويلها إلى الصورة (1) بالتعويض

$$ص = s + \frac{ا}{3}$$

$$\text{أو } \frac{1}{3} - \text{ص} = \text{س}$$

$$\text{ج} = (\frac{1}{3} - \text{ص}) + \text{ب} + \text{أ} + (\frac{1}{3} - \text{ص}) + \text{ب} + \text{أ} + (\frac{1}{3} - \text{ص}) + \text{ب} + \text{أ}$$

$$\text{معامل ص}^2 \text{ هو } -\frac{1}{3} \times 3 = -1$$

وتصبح المعادلة في ص من النوع

$$\text{ص}^2 + \text{أ} + \text{ب} = 0$$

لننظر إذن إلى المعادلة (١)

الطريقة المتبعة لحل (١) هي تقاطع الدائرة

$$(\text{س} - \frac{\text{ب}}{2})^2 = \text{ص}^2 + \frac{\text{ب}}{2}$$

مع القطع المكافئ $\text{س}^2 = \text{أ} + \text{ص}$

$$\text{نقط التقاطع هي } (\text{س} - \frac{\text{ب}}{2})^2 = \frac{\text{س}^4}{2} + \frac{\text{ب}}{2}$$

$$0 = \frac{\text{س}^4}{2} + \frac{\text{ب}}{2} - \text{س}^2$$

$$0 = \frac{\text{س}}{2} (\text{س}^3 + \text{ب} - 2\text{س}^2)$$

$$\text{أي } \text{س}^3 + \text{ب} - 2\text{س}^2 = 0$$

$$\text{حل المعادلة } \text{س}^3 + \text{ب} - 2\text{س}^2 = 0$$

مثال:

وبالمثل في حالة المعادلة $s^3 = أس + ب + أ، ب < ٠$

نعود إلى تقاطع القطع المكافئ $s^2 = \sqrt{أ} ص$

مع القطع الزائد $s = (س + \frac{ب}{س})$ أي $ص^2 - ص + \frac{ب}{س} = ٠$

عند التقاطع نجد أن $s^2 + س = \frac{ب}{س} = \frac{س^4}{س}$ أي

$$\frac{s^3}{س} + س = \frac{ب}{س} \quad \text{أي} \quad s^2 = أس + ب$$

وبالمثل فإن الطريقة المتبعة في حالة

$$s^3 + ب = أس$$

هو تقاطع القطع المكافئ $s^2 = \sqrt{أ} ص$

مع القطع الزائد $ص^2 - ص + \frac{ب}{س} = ٠$

ابن الهيثم:

لم ينل عالم عربى فى مسيرة التاريخ ما ناله ابن الهيثم من تقدير لنبوغه العلمى والهندسى وإذا كان العالم مازال يذكر حتى اليوم فخر بحوثه أى كتابه (المناظر) فى علم البصريات إلا أن ابن الهيثم كان رياضيا مبدعا ومهندسا كبيرا بمقاييس عصره . فهو أول من أشار إلى فكرة تخزين مياه النيل عند أسوان للإنتفاع بها فى مواسم الجفاف .

حدث هذا بينما كان الحاكم بأمر الله يحكم مصر (الدول الفاطمية) ، فقد سمع الحاكم بأمر ابن الهيثم وعلو مقامه فى العراق وأنه قال " لو كنت بمصر لعملت فى نيلها عملا يحصل به النفع فى كل حاله من حالاته من زيادة ونقصان . منذ بلغنى أنه ينحدر من مكان عال وهو فى طرف الإقليم المصرى " فأرسل إليه الحاكم بأمر الله أموالا وهدايا وناشده الحضور إلى مصر . فلما جاء ابن الهيثم خرج الحاكم بأمر الله لاستقباله خارج القاهرة والتقى به عند قرية قرب أحد أبواب القاهرة مرحبا وأكرم وفادته .

وانتظر الحاكم أياما حتى إستراح ابن الهيثم من عناء السفر ثم طالبه بما قاله فى أمر النيل . وسار ابن الهيثم ومعه جماعة من الصناع المتولين للعماره بأيديهم - وكأنه على رأس بعثة هندسية بأدق المعانى الحديثه لهذه الكلمة - يتبع مجرى النيل من القاهرة

إلى جنوب أسوان حتى وصل إلى مكان يقال له الجنادل (الشلال) ولم يجد ابن الهيثم - كما بلغه من قبل - موضعا عاليا ينحدر منه فعينه واختبره من جوانبه ، وفكر وقدر ، فلم يجد الأمر متفقاً مع الفكرة الهندسية التي خطرت له فعاد إلى القاهرة خجلاً واعتذر للحاكم .

وقبل الحاكم اعتذاره وإقناعه بما أبدى من أسباب ، بل ولاء منصباً من مناصب الدولة . لكن ابن الهيثم كان كارهاً لأعمال الدواوين ، ميالاً إلى الإنقطاع إلى البحث العلمي وإجراء التجارب وتأليف الكتب ، ففكر في حيلة يتخلص بها من المنصب دون أن يجلب على نفسه غضب الحاكم ، فلم يجد وسيلة غير أن يتظاهر بالجنون وخيال العقل . وأشاع ذلك عن نفسه حتى بلغ الحاكم فعزله عن منصبه وصادر أمواله وعين عليه من يقوم بخدمته .

وظل ابن الهيثم في هذا الوضع المأساوي حتى مات الحاكم بأمر الله . فلما تيقن من الخبر إستوطن غرفة بجوار الجامع الأزهر وعاد إلى البحث العلمي وإنقطع له ، ولبث بعد ذلك حياً أكثر من ثمانية عشر عاماً أصدر خلالها كتابه " المناظر " أكبر أعماله العلمية وأجلها شأناً .

...

إن من المتفق عليه اليوم بين مؤرخي العالم في الغرب أن أوروبا القرون الوسطى قد شقت طريقها إلى عصر النهضة (القرن

السادس عشر) من خلال التراجم العربية للتراث العلمى والفلسفى اليونانى التى كانت موجودة بالأندلس وصقلية وغيرها ، ومن خلال الكتب والمؤلفات العربية التى ترجمها الأوريون إبان الحروب الصليبية (القرنان الحادى عشر والثانى عشر الميلادى) ، إلا أن هؤلاء المؤرخين يتفاوتون حول قيمة الابتكار والأصالة فى تراث الحضارة العربية الإسلامية . ورغم ذلك فهم جميعا وبدون إستثناء يتفقون على أن ابن الهيثم كان عالما عربيا أصيلا ويكفى أن نشير إلى ما قاله العالم البريطانى برونفسكى فى كتابه " إرتقاء الإنسان " عند تعرضه لحركة الترجمة الأوربية للتراث اليونانى فى الأندلس.

" إن أشهر المترجمين وأنبغهم كان جيراردى كرىمونا الذى جاء من إيطاليا خصيصا للبحث عن نسخة من كتاب بطليموس فى الفلك (المجسطى) والذى أقام فى طليطلة لترجمة أرشميدس وهيبوقريطس وجالينوس وإقليدس - عمالقة العلم اليونانى . ومع ذلك ففى رأى أن أروع الرجال الذين ترجمت أعمالهم وأشدهم نفوذا فى المدى الطويل - لم يكن يونانيا . ومصدر حكمى هذا أننى مهتم بتصوير الأجسام فى الفراغ ، وهو موضوع كان اليونانيون فيه على خطأ بين . لقد فهم هذا الموضوع لأول مره حوالى ١٠٠٠ م على يد رياضى عربى غريب الأطوار يدعى ابن الهيثم . وهو وحده العقل العربى الأصيل الذى أنجبه الثقافة العربية " .

" لقد ظن اليونانيون أن الضوء ينطلق من العين إلى الأجسام ولكن ابن الهيثم أدرك لأول مرة أننا نرى الجسم لأن كل نقطة عليه ترسل شعاعا إلى العين وتعكسه منها"

" إن التصور اليونانى لم يكن قادرا على تفسير كيف أن جسما - يذى مثلا- يبدو وقد تغير حجمه عندما يتحرك . أما فى تفسير ابن الهيثم فهذا أمر واضح، إذ أن مخروط الأشعة الذى يصدر عن إيطار يذى وشكلها يأخذ فى الصغر كلما تحركت يذى بعيدا عنك . وكلما إقتربت يذى منك أخذ مخروط الأشعة الذى يدخل عينيك فى الكبر وكانت زاوية رأسه أكبر .

" إن هذا - وهذا فقط - هو الذى يفسر تغير حجم اليد - بالنسبة للمشاهد - عند الحركة . إن فكرة ابن الهيثم من البساطة بحيث يبدو مدهشا أن العلماء لم ينتبهوا لها إلا بعد ستمائة عام من نشره لها . أما الفنانون فقد تعاملوا مع هذه الفكرة بطريقة عملية ، قبل العلماء بزمان طويل . إن مفهوم مخروط الأشعة الصادر عن الجسم إلى العين هو أساس فكرة " المنظور " ، والمنظور هو الفكرة الجديدة التى منحت الرياضيات حيوية جديدة " .

أما برنال فى كتابه " العلم فى التاريخ " فهو يؤكد على الأهمية الفسيولوجية للوصف الدقيق الذى قدمه ابن الهيثم لتركيب العين ، فى مناطق شديدة الحرارة كثرت فيها أمراض العيون .

وفى كتاب ألدوميللى " العلم عند العرب " فهو يقول إن
ابن الهيثم تجاوز ببيد - بكتابه المناظر ، أهمية جميع الفيزيائيين
العرب الآخرين ، بل كان باعشا إلى البحوث والأعمال التى قام بها
كل من روجر بيكون ووايتلو .

ولقد أدت دراسات ابن الهيثم فى ظواهر إنعكاسات الضوء
وانكساراته إلى حل العديد من المعضلات الرياضية ومنها المشكلة
المعروفة بإسمه وتتلخص كما يلى :

" افرض دائرة مركزها و ، وافرض نقطتين خارجتين عن الدائرة
المطلوب إيجاد نقطة أ على محيط هذه الدائرة بحيث يكون
المستقيمان اللذان يربطان هذه النقطة أ بالنقطتين الخارجيتين زوايا
متساوية مع نصف قطر الدائرة أ و . لقد احتوى حل هذه المشكلة
على معادلة من الدرجة الرابعة حلها ابن الهيثم بواسطة نقط تقاطع
دائرة وقطع زائد .

جمشيد الكاشى :

من أسماء التفخيم التى أطلقت على بعض الرياضيين أو الفلكيين
الإسلاميين إسم (الحاسب) فمثلا كان من النشيطين فى علم الجبر
زمن وفاة ثابت بن قره حوالى ٣٩٠ أبو كامل (من مصر) وكان
معروفا بإسم (الحاسب المصرى) وقد ألف أبو كامل كتابا فى الجبر
هو بمثابة تعليق على كتاب الخوارزمى (الجبر والمقابلة) ، وقد أصبح

كتابه هذا مرغوباً جداً حتى أن باحثاً مثل الكرجى فى أواخر القرن العاشر والأيطالى ليوناردى بيزا (المعروف بإسم (فيبوناتشى) فى أواخر القرن الثانى عشر) قد إستخدما بكثرة الأمثلة الواردة فى كتاب أبو كامل فى الجبر .

ومع ذلك فالغريب أن الرجل الذى كان أكثر إستحقاقاً لهذا اللقب (الحاسب) لم يحصل عليه فيما يبدو . ذلك هو - غياث الدين جمشيد الكاشى .

ولد الكاشى فى النصف الثانى من القرن الرابع عشر بمدينة كاشان التى تبعد عن أصفهان (مدينة الخيام) بنحو ٩٠ ميل . لكننا لا نعرف شيئاً عن حياته حتى عام ١٤٠٦ م ، عندما بدأ - كما يقول هو - سلسلة من المشاهدات للخسوف القمرى فى كاشان . وفى العام التالى كتب بحثاً عن أبعاد الكون وأهداه إلى أمير مغمور . وبعد ذلك بسبع سنوات فى عام ١٤١٤ إنتهى من مراجعة الجداول الفلكية العظيمة التى وضعها نصير الدين الطوسى قبل ذلك بنحو ١٥٠ عاماً . وأهدى هذه المراجعة إلى الخان العظيم (خاقان) أولوج بك حفيد تيمورلنك وكانت عاصمته سمرقند . وفى مقدمة هذه الجداول يتحدث الكاشى عن فقره الذى عاناه وكيف أن كرم أولوج بك هو الذى أعانه على أن يكمل هذا العمل .

وقد انضم الكاشى إلى حاشية أولوج بك فى سمرقند ،
وخلال عام ١٤١٢ بدأ أولوج بك بناء مدرسة هناك ما زالت بقاياها
موجودة حتى اليوم ، وبعد الإنتهاء من بناء المدرسة بدأ بناء مرصد .
وخلال تلك الفترة فى سمرقند جاءت أعظم إنجازات
الكاشى ، ومنها حسابه المدهش لقيمة طـ صحيحة لستة عشر رقم
عشرى . ولكى يصل الكاشى إلى هذه الدرجة من الدقة بطريقة
الإستغراق التى إستعملها أرشميدس كان عليه إستخدام مضلعات
منتظمة داخلية وخارجية (لدائرة معلومة) وصل عدد أضلاعها إلى
نحو ٤٠٠ ضلع .

ومما يجعل هذا الإنجاز لافتا للنظر أن الكاشى يذكر مقدما
أى درجة من الدقة يريد ثم يخطط فى عناية مدى دقة كل مرحلة
من الحساب بحيث لا تتراكم أخطاء التقريب .

وعلى الرغم من أن هذا الدراسة لـ طـ لا تحتوى على
إهداء لأحد إلا أن العمل الذى إستكمل بعد ذلك بسنتين - وهو
مجمع للحساب والجبر والقياس ويسمى (مفتاح الحاسب) - مهدى
إلى أولوج بك . ومن إنجازات هذا الكتاب الفريدة العرض المنهجى
لحساب الكسور العشرية ، وهو إختراع ينسبه الكاشى لنفسه وهو إدعاء
غير صحيح لأننا نعلم من كتاب أبو الحسن الإقليديسى (فصول فى
الحساب الهندى) عام ٩٥٣ م أنه إستخدم الكسور العشرية فى هذا
الكتاب ، كما أنه ذكر فى كتابه هذا أنه إستخدم أفضل الطرق

الموجودة فى كتب من سبقوه فى عرض مادة كتابه . لذا من الصعب القول أن أبا الحسن الإقليديسى هو مكتشف الكسور العشرية ، ولكن عدم وجود الكسور العشرية فى المصادر الهندية يؤكد أنه اكتشاف إسلامى .

ومن إنجازات الكاشى أيضا فى كتابه (مفتاح الحاسب) طريقته البديعة لحساب الجذر الخامس لأى عدد . ولقد بلغ من روعة هذا الكتاب أنه ظل فى المدارس الفارسية حتى القرن السابع عشر ككتاب مدرسى . ومن المثير أن نعرف أن نسخة من هذا الكتاب موجودة فى المتحف البريطانى وأخيرا من المسائل التى يذكرها الكاشى فى كتابه (مفتاح الحاسب) هى تلك المتعلقة بحل معادلة من الدرجة الثالثة (بالطريقة البيانية) وذلك لحساب جا ١°

ولقد مات الكاشى فى عام ١٤٢٩ م فى المرصد الذى ساعد على بناءه . وفى مقدمة جداوله الفلكية المكتوبة بعد وفاته بثمان سنوات يشير أولوج بك إلى الكاشى باعتباره (الملا المحبوب المعروف بين مشاهير العالم الذى سيطروا على علوم القدماء وأكملوها والذين يستطيعون حل أعقد المشاكل) .

طريقة الكاشى فى حساب الجذر التربيعى

سوف نشرح هنا طريقة الكاشى فى حساب الجذر التربيعى للعدد ٣٣١٧٨١

(١) يقسم الكاشى العدد إلى مجموعات ثنائية (يسميها دورات) بادئا من اليمين ويصبح ٨١ ١٧ ٣٣ وكما يشرح الكاشى فحيث ان الأعداد ١٠٠٠٠، ١٠٠، ١ لها جذور تربيعية صحيحة (على عكس ١٠، ١٠٠٠ ... إلخ) فإن هذه الدورات ذات أهمية ، فالدورة الأولى تحسب الآحاد ، والثانية (١٧) تحسب عدد المئات ، والثالثة (٣٣) عدد عشرات الألوف . وهكذا .. ثم يرسم خطا عند قمة العدد وخطوطا رأسية تفصل الدورات كما يبدو فى الشكل (١) .

٥	٥	٥																														
<table> <tr><td>٣٣</td><td>١٧</td><td>٨١</td></tr> <tr><td>٨</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>١</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>٥</td><td></td><td></td></tr> </table>	٣٣	١٧	٨١	٨			١			٥			<table> <tr><td>٣٣</td><td>١٧</td><td>٨١</td></tr> <tr><td>٨</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>٥</td><td></td><td></td></tr> </table>	٣٣	١٧	٨١	٨			٥			<table> <tr><td>٣٣</td><td>١٧</td><td>٨١</td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	٣٣	١٧	٨١						
٣٣	١٧	٨١																														
٨																																
١																																
٥																																
٣٣	١٧	٨١																														
٨																																
٥																																
٣٣	١٧	٨١																														
(ج)	(ب)	(أ)																														

(٢) للحصول على الخانات الثلاث الأولى للجذر يبحث الكاشى عن أكبر عدد ن بحيث لا يزيد ن^٢ عن ٣٣ . بالطبع ن = ٥ يكتب

الكاشى العدد ٥ أعلى (شكل ب) وأسفل ٣٣ بمسافة (شكل ب)
والآن نطرح ٢٥ من ٣٣ نحصل على ٨ ونكتبها تحت ٣٣ ونضع خطا
تحت ٣٣ لتوضيح أنه فرغ من الجزء ٣٣ والآن يضاعف الكاشى الجزء
من الجذر الذى حصل عليه أى يضاعف ٥) ويكتب هذا المضاعف
١٠ فوق الخمسة مع إزاحة خانة واحدة إلى اليمين (شكل ج)
عند هذه المرحلة لدينا إجابة جارية (مؤقتة) ٥ فى القمة ، وضعف
هذه الإجابة (١٠) فى الأسفل .

(٣) ثم يسأل الكاشى عن أكبر عدد س بحيث أن س (١٠٠ + س) ≥ ٨١٢
والتجربة توضح أن س = ٧ فيكتب ٧ فى القمة فوق قمة ١٧ ثم
أسفل تالية للعشرة الموجودة أسفل كما هو موضح فى الشكل (١٢) .
ثم يجرى الحساب س (١٠٠ + ٧) = ٧٤٩ ويطرح هذا الناتج من
٨١٢ ليحصل على ٦٨ (شكل ١.٢)

٥	٧	٦
٣٣	١٧	٨١
٨		
	٦٨	٧٦
		٥
	١١	(٥٢) ٤٦
١	٠٧	
٥		

شكل (٢. ج)

٥	٧	
٣٣	١٧	٨١
٨		
	٦٨	
	١١	٤
١	٠٧	
٥		

شكل (٢. ب)

٥	٧	
٣٣	١٧	٨١
٨		
	٦٨	
١	٠٧	
٥		

شكل (١. ٢)

(٤) ثم يعيد العملية مرة أخرى مضاعفا الرقم الأخير في ١٠٢ ليصبح ١١٤ ويكتب هذا فوق ١٠٢ ولكن مع إزاحة خانة إلى اليمين- (انظر شكل (٢.ب) . ومرة أخرى لديه إجابة ٥٢ على القمة وضعف هذه الإجابة تحت (أسفل) (١١٤) ، وكما سبق يسأل ما هو أكبر رقم صحيح بحيث أن $(١١٤٠ + س) س \geq ٦٨٨١$. والإجابة بالتجربة هي $س = ٦$ وبضرب ٦×١١٤٦ وطرحها من ٦٨٨١ نحصل على ٥ أما الخانة الأخيرة في ١١٤٦ فتضاعف ويصبح العدد ١١٥٢ أي $(٦ + ١١٤٦)$ انظر (٢.ج)

(٥) وهكذا فإن الكاشي يكون قد حصل على جذر تربيعي تقريبي (٥٢٦) كإجابة مؤقتة وضعف هذا العدد (١١٥٢) عند القاع . وأخيرا يزيد الكاشي هذا العدد واحدا ليصبح ١١٥٣ ويقسم الباقي (٥) على ١١٥٣ فيحصل على الجذر التربيعي التقريبي للعدد ٣٣١٧٨١ وهو $\frac{٥}{١١٥٣}$ $٥٢٦,٠٠٤٣٤ = ٥٢٦$

ولو حسبنا مربع هذا العدد لوجدناه ٣٣١٧٨١,٠٩٩٦ مما يوضح أن نتيجة الكاشي قريبة جدا من الجذر التربيعي .

تبرير طريقة الكاشي

يثور هنا سؤالان : (١) ما هو التبرير لطريقة الكاشي في حساب الجزء الصحيح من الجذر (٥٢٦) .

(٢) ما هو التبسيط لطريقة الكاشي في حساب
الجزء الكسرى .

سوف نبدأ بالإجابة على الجزء الثانى أولا أنه الأسهل .

الجزء الكسرى

الواقع أن بسط الكسر (وهو خمسة) يساوى ٣٣١٧٨١ - ٥٧٦^٢ ،
بينما المقام هو ٥٧٧^٢ - ٥٧٦^٢ . وذلك لأن ١١٥٣ يزيد واحدا عن
ضعف الإجابة المعروفة ٥٧٦ أى أن

$$٥٧٦^٢ - (٥٧٦ + ١)^٢ = ٥٧٦ \times ٢ + ١ = ١١٥٣$$

وهكذا فإن الجزء الكسرى من الإجابة ($\frac{٥}{١١٥٣}$) هو بالضبط ما نحصل

$$\frac{٥٧٦^٢ - ٣٣١٧٨١}{٥٧٦^٢ - ٥٧٧^٢}$$

عليه من الإستكمال الخطى أى

وهو أسلوب قديم إستخدمه بطليموس فى كتابه (المجسطى) فى
النصف الأول من القرن الثانى الميلادى وفهم هذا الأسلوب كما
فهمه وبرره فلكىو القرون الوسطى ، نتصور جدولا عموده الأول هو
المربعات الأعداد الصحيحة ١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ ، ... وعموده الثانى هو
الأعداد الصحيحة ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ...

ن	$\sqrt{ن}$
١	١
٤	٢
٩	٣
١٦	٤
\vdots	\vdots
٣٣١,٢٢٦	٥٧٦
٣٣٢,٩٢٩	٥٧٧
\vdots	\vdots

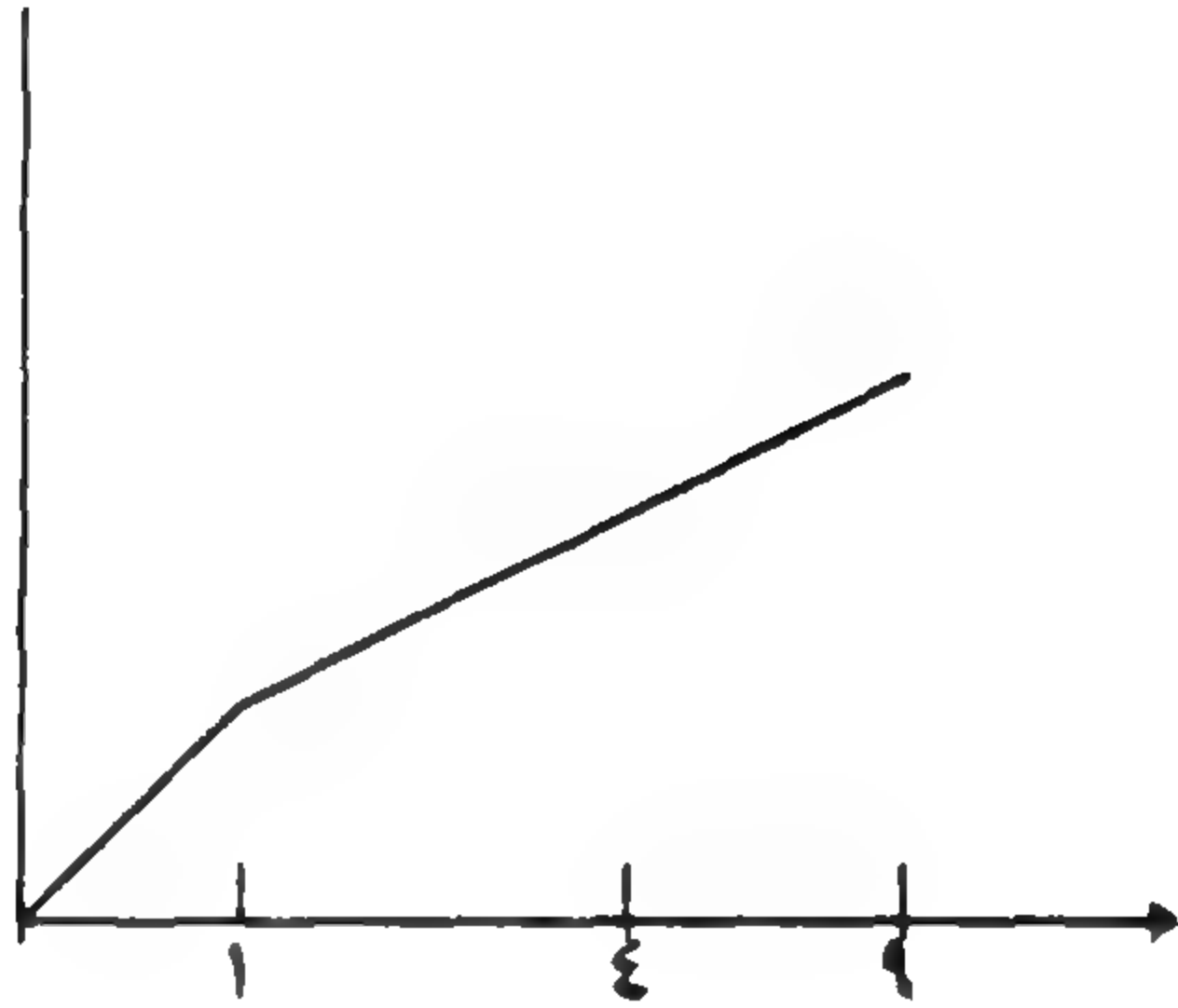
جدول (٣)

لإيجاد $\sqrt{٦}$ فإن أسهل طريقة هو أن نلاحظ أن $٩ > ٦ > ٤$ وبالتالي فإن $٢ < \sqrt{٦} < ٣$ أيضا وحيث أن $٢ = ٤ - ٩$ ، $٥ = ٩ - ٤$ فإن ٦ تقع في $\frac{٢}{٥}$ المسافة بين ٤، ٩ وبالتالي فإن $\sqrt{٦}$ هي أيضا تقريبا في $\frac{٢}{٥}$ المسافة بين ٢، ٣

$$\text{أي } \sqrt{٦} = \frac{٢}{٥} \text{ تقريبا}$$

نلاحظ هنا أن هذا التحليل مبني على افتراض أن $\sqrt{س}$ يتناسب مع س أو بمعنى آخر أن الدالة $>(س) = \sqrt{س}$ خطية، أي أن منحنى

الدالة خط مستقيم . وبالرغم من أن هذا ليس صحيحا تماما كما نرى من الشكل ، إلا أن هذا الشكل يوضح أيضا أن المنحنى تقريبا مستقيم لقيم $s < 1$ بشرط ألا تكون الفترة [أ ، ب] كبيرة



وهذا هو السبب في الحصول على تقريب جيد في هذا التمرين ويوضح الجدول (٣) أن $(٥٧٦)^2 = ٣٣١٧٧٦ > ٣٣١٧٨١ > ٣٣٢٩٢٩ = (٥٧٧)^2$ وحيث أن $٣٣١٧٨١ - (٥٧٦)^2 = ٥$ بينما $(٥٧٧)^2 - (٥٧٦)^2 = ١١٥٣$ نستنتج أن الجذر التربيعي للعدد ٣٣١٧٨١ يقع بالتقريب عند

$$\frac{٥}{١١٥٣} \text{ من المسافة بين } ٥٧٦ ، ٥٧٧$$

$$\text{أى أن } ٥٧٦ \frac{٥}{١١٥٣} = \sqrt{٣٣١٧٨١}$$

تبرير الجانب الصحيح :

يعرف الكاشي أنه إذا كان لدينا العدد

٨ ٧ ١ ٣ ٣

ن = أ ب ج د هـ و

فإن أكبر عدد صحيح س يحقق $s' \geq n$ له نصف عدد خانات

ن (٣ في حالتنا هذه) ولذلك يقسم ن إلى ما يسميه دورات ولذا يضع

$$n = \text{أ ب} + \text{ج د} \times 10^2 + \text{هـ و} \times 10^4$$

والآن فإن الخطوة الأولى عند الكاشي هو إيجاد أكبر عدد م بحيث

$$m' \geq \text{هـ و}$$

م سيكون مكون من خانة واحدة لأن هـ و له خانتان

م سيكون الرقم الأول في الجذر كما يمكن أن نتحقق (م = ٥)

والخطوة الثانية هي حساب الفرق

$$\Delta_1 = n - (m' \times 10^2)$$

$$= (\text{هـ و} - m') \times 10^2 + \text{ج د} \times 10^2 + \text{أ ب}$$

ثم نبحث الخطوة التالية وهي إيجاد أكبر عدد ك بحيث أن

$$\Delta_2 = n - (m' \times 10^2 + k \times 10^4) \leq 0$$

بالتجربة نجد أن $k = ٧$ ولا تنفع $k = ٨$

وهو يستخدم المتطابقة الأساسية $s' = (s + v) \times 10^2$

$$+ (2s + v) \times 10^4$$

فيجعل $\Delta_2 = n - (m \times 100 - (m^2 \times 100 + k \times 10) \times k)$

$$\Delta_1 = (m^2 \times 10 + k) \times k - 100 \times k$$

التعبير $m^2 \times 10 + k$ هو المكافئ لإقتراح الكاشي بمضاعفة m الرقم السابق في الجذر) ثم وضع الرقم k (٧) تاليا لها.

وكما يقول الكاشي فإن هذا الرقم التالي يختار كالأكبر

بحيث أن حاصل الضرب

$$(m^2 \times 10 + k) \times k - 100 \times k$$
 لا يزيد عن الفرق السابق

وضرب m^2 في ١٠٠٠ بدلا من ١٠٠٠٠ يتضح في إزاحته خانة إلى

اليمين ولا بد أن يكون قد أصبح واضحا الآن الأسلوب الذي إتبعه

الكاشي عندما يعين k كأكبر ما يحقق $(m \times 100 + k \times 10) \times k \geq n$

ثم نختار e ليكون أكبر ما يحقق

$$n - (m \times 100 + k \times 10 + e) \times k \leq 0$$

حيث يأخذ $s = m \times 100 + k \times 10$

$$e = v$$

ويستخدم المتطابقة $(s + v) \times k = s^2 + (2s + v) \times v$

إن هذه المتطابقة أو صورتها البديلة ، $(s + v) \times k - s^2 = v^2$

$$= (2s + v) \times v$$

هي أساس خوارزمية إستخلاص الجذور

وطريقة الكاشي تستفيد من حقيقة أنه عند إيجاد $n - (s + v) \times k$

فإن الجزء $n - s^2$ قد حسب في الخطوة السابقة

الكاشى والجذر الخامس

من المدهش أن الكاشى قد حسب الجذر الخامس للعدد
١٩٧ ر ٥٠٦ ر ٨٩٩ ر ٢٤٠ ر ٤٤٤ وهو من رتبة الترليونيات . ويصل من
حساباته إلى أن الجذر الخامس هو

$$\frac{21}{414237} + 536$$

واستخلاص الجذر الخامس والجذور الأعلى كان وفق شهادة الخيام
فى كتابه "الجبر" من صنعه فهو يقول فى هذا الكتاب إنه إبتكر طرقا
للحصول على الجذر الرابع والخامس والسادس والجذور الأعلى
"ولم يسبقنا أحد فى هذا " وهذه البراهين حسابية تماما ومبنية على
حساب " الأصول " . والحقيقة أن الخيام ليس أول ولا آخر رياضى
يعتقد خطأ أنه مبتكر طريقة رياضية جديدة فنحن نعلم أن "أبو الوفا"
الذى عاش قبل الخيام بمائة عام فى أواخر القرن العاشر كتاب كتابا
عنوانه "حول إيجاد الجذر الثالث والرابع والجذور الأعلى من هذا".
وبالطبع فالأرجح أن الخيام لم يكن على علم بكتاب "أبو الوفا" وأن
عمل "أبو الوفا" لم يكن فى إبتكارية إنجاز الخيام .

نصير الدين الطوسى : أبو جعفر بن الحسن نصير الدين الطوسى ولد عام
١٢٠٠ م ومات ١٢٧٤ م وكان يلقب بالمحقق . قضى الطوسى شبابه مغامرة
حيث وشى به أحد وزراء الخليفة المعتصم فأودع السجن ، وفيه أنجز معظم

تأليفه فى العلوم الرياضيه . ثم أسره المغول عام ١٢٥٦ م وبفضل سمعته فى العلوم والنجوم إستخدمه هولاءكو ضمن بطانته حتى أصبح وزيرا له . وقد شهد الطوسى سقوط بغداد على أيدي المغول عام ١٢٥٧ م .

ولقد نجح الطوسى فى إقناع هولاءكو ببناء مرصد مراغة الشهير وظل متوليا إدارته حتى وفاته . وتتعلق معظم كتبه بالرياضيات والفلك وإلى حد أقل بالجغرافيا والفلسفة والطب . ومن أشهر كتبه كتاب (تذكرة فى علم الهيئة) وهو خلاصة مركزة للنظريات الفلكية فى عصره ، وفيه ينقد نظريات بطليموس فى كتاب (المجسطى) . وهذا النقد كان الخطوة الأولى التى مهدت لكوبرنيكس القيام بإصلاحاته فى علم الفلك .

ومن أهم أعماله دراسة المسلمة الخامسة فى أصول إقليدس (مسلمة التوازى) ، وقد ثبت أن معرفة زخارى بعد ذلك بكتابات الطوسى هى بداية عمله فى الهندسة الاقليدية . ولقد ترجمت كتابات الطوسى فى الهندسة بواسطة العالم الإنجليزى جون والس Wallis وكانت أساس محاضراته فى جامعة أكسفورد فى القرن الخامس عشر .

وقد ألف الطوسى أيضا فى حساب المثلثات والجبر ، وفى حساب المثلثات كان أول من حاول وضعه كعلم مستقل عن الفلك فى كتابه (شكل القطاع) وعليه إعتمد الأوييون زمنا طويلا فى تدريس حساب المثلثات المستوية والكروية .

وللطوسي أيضا في الهندسة (كتاب تحرير أصول إقليدس) ، و
(الرسالة الشافية عن الشك في الخطوط المتوازية) ، وفيها حاول أن يستنبط
المسلمة الخامسة من المسلمات الأربع الأولى الواردة في كتابه الأصول .
وهناك من يرى أن الطوسي قد إطلع على أعمال الخيام في قضية
التوازي .

أبو الكامل وعلم الجبر :

من الباحثين النشطين زمن وفاة ثابت بن قره ٩٠١ م ، من مصر وكان
معروفا باسم " الحاسب المصري " وكتابه في الجبر بمثابة تعليق على كتاب
الخوارزمي (الجبر والمقابلة) وقد أصبح كتابه هذا مرغوبا جدا حتى أن
باحثا مثل " الكرجي " في أواخر القرن العاشر والإيطالي ليوناردى بيزا (
والمعروف باسم فيبوناتشى) Fibonacci فى أواخر القرن الثانى عشر قد
إستخدما بكثرة الأمثلة الواردة فى كتاب أبو الكامل .

ومن المتوقع أن يكون هناك تشابه كبير بين كتابه فى الجبر وكتاب
الخوارزمى فهو مثلا يستخدم مصطلحات الخوارزمى الأساسية كالجدور
والمال للتعبير عن س ، س^٢ ، ثم هناك نفس التقنين لمعادلات الدرجة الثانية
إلى ستة أنواع وبنفس الترتيب . وأخيرا يناقش أبو الكامل - مثل
الخوارزمى - البراهين الهندسية للأمثلة الواردة .

ومع ذلك فإن كتاب أبو الكامل بإعطائه صيغا عامة لقواعد يستخدمها الخوارزمي في أمثلة إنما يتقدم على الخوارزمي ، ثم يقدم براهين على هذه القواعد في التعامل مع الكميات الجبرية على النحو التالي :

$$(1) (a \pm c)(b \pm c) = ab \pm bc \pm ac + c^2$$

$$(a \pm c)(b \mp c) = ab \pm bc \mp ac - c^2$$

$$(2) \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}, \quad \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

$$(3) \sqrt{\sqrt{a}^2 \pm b} = \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$$

مسألة من كتاب أبو الكامل

يحتوى كتاب أبو الكامل على ٦٩ مسألة مختلفة ، على عكس كتاب الخوارزمي الذى يحتوى على ٤٠ مسألة فقط . ومن أكثر المسائل إثارة للإهتمام المسألة (٦١) وهى كما يلى :

"يقول رجل إن العشرة مقسمة إلى ثلاثة أجزاء . وإذا ضرب الجزء الأصغر فى نفسه وأضيف إلى الجزء الأوسط مضروبا فى نفسه فإن الناتج هو الجزء الأكبر مضروبا فى نفسه . وإذا ضرب الجزء الأصغر فى الجزء الأكبر فإن الناتج هو الجزء الأوسط مضروبا فى نفسه .

إنه يتحدث هنا عن ثلاث مقادير س ، ص ، ع موجبہ بحيث $s > v > c$ وتحقق الشروط التالية :

$$s + v + c = 10$$

$$c^2 = s^2 + v^2$$

$$س ع = ص^2$$

ولحل المسألة يضع س = ١ فتصبح الشروط

$$ص + ع = ٩$$

$$ع^2 = ١ + ص^2$$

$$ع = ص^2$$

وفي المعادلتين الأخيرتين بحذف ع نحصل على

$$ص^4 = ١ + ص^2 \quad \text{أى } ص^4 - ص^2 - ١ = ٠$$

(معادلة من الدرجة الثانية في $ص^2$)

$$\therefore ص^2 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = ع = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}}$$

$$أو ص = \sqrt{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}}}$$

$$\text{أى } ١ + ص + ع = \sqrt{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}}} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}} = ٣$$

وإذا أسمينا هذا المقدار أ مثلاً فإن من المفروض أن تكون أ تساوى ١٠

ولكن من الواضح أنها ليست كذلك . فإذا وضعنا

$$ب = (١ + ص + ع) = ١٠$$

$$\text{أى } ب + ب + ب + ب + ب = ١٠ \quad \text{أى أن}$$

$$ب = \frac{١٠}{\sqrt{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}}} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}} + ١}$$

بن الواضح أن الحلول المطلوبة هي ب ، ب ص ، ب ع .
 لن نستمر في تفاصيل بحث أبو الكامل ، وسوف نكتفى أن نذكر أنه
 على قيمة ب كجذر للمعادلة $10b = b^2 + 75 - \sqrt{3125}$
 ومنها نحصل على $b = 5 - \sqrt{3125} - \sqrt{50}$
 ثم يحصل على قيمة ع $= 2 - \sqrt{31\frac{1}{4}} - \sqrt{71\frac{1}{4}} - \sqrt{12\frac{1}{2}}$
 حل هذه المسألة يوضح المستوى العلمي الذي كان عليه أبو الكامل في
 الزمان القديم

الإستقراء الرياضى فى الحضارة العربية الإسلامية

القرن العشرين ، فى أوربا ، نقح تاريخ الإستقراء الرياضى وأعيدت كتابته
 مرات منذ عام ١٩٠٩ ولقد بدأ الأمر برأى بسيط قصير جدا ... ثلاث
 حات فى نشرة الجمعية الرياضية الأمريكية زعزع بواسطتها فاك (Vacca
 كيدا كان مقبولا من قبل المؤرخين الغربيين ، ومفاده أن الإستقراء
 ياضى هو من منجزات القرن السابع عشر ويجب أن ينسب إلى باسكال
 Pasx ، إذ أوضح فاك أن الفضل الأول فى إكتشاف منهج الإستقراء
 ياضى إنما يعود إلى (موروليكو) لا إلى باسكال .
 وبعد ٤٤ عاما من نقد فاك وبعد فحص متصل لأعمال (موروليكو)
 ضح فرويدنتال أن هناك ثلاث محاولات لإستخدام الإستقراء الرياضى

السابقة على باسكال، بحيث يمكن أن نقول أن باسكال قدم مبدأ الإستقراء الرياضى مصاغاً للمرة الأولى بشكل مجرد .

ومنذ دراسة فرويدنتال حاول آخرون إرجاع هذه الطريقة فى البرهان إلى ليفى بن جرسون وسوف نحاول هنا أن نبين أن محاولات أكثر أهمية - وسابقة على موروليكو وليفى بن جرسون - موجودة لدى رياضيين مسلمين ، أحدهما لديه أعمال معروفة من قبل المؤرخين الغربيين وهو الكرجى ، والآخر إكتشفت أهميته حديثاً وهو السموأل .

[الكرجى أو الكرخى ... لا نعرف عن حياته سوى أنه عاش فى بغداد فى نهاية القرن العاشر الميلادى وبداية القرن الحادى عشر . أما السموأل فهو السموأل بن يحيى بن العباس المغربى المتوفى ١١٢٥ م ، وله كتابه الشهير (الباهر) فى الجبر]

ففى نص للكرجى يعرضه السموأل فى كتابه " الباهر " نجد للمرة الأولى فى التاريخ - على حد علمنا - صيغة ذات الحدين $(أ + ب)^ن =$

$$\frac{n!}{r! (n-r)!} A^r B^{n-r}$$

ونلاحظ نموذجاً من البرهان ومراحله كما يلى :

(١) يبدأ المؤلف ببرهنة بعض القضايا التبادلية والمتعلقة بتوزيع الضرب على الجمع .

تبادلية من نوع $(أب) \cdot (ج د) = (أ ج) \cdot (ب د)$

وتوزيع الضرب على الجمع من نوع

$$(أ + ب) ج = أ ج + ب ج$$

(٢) بواسطة هذه القضايا يتولى السموأل برهان الصيغتين التاليتين :

$$(أ + ب)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} أ^r ب^{n-r} \quad \text{ن ق ر} \quad \text{ن عدد صحيح}$$

$$(أ ب)^n = أ^n . ب^n$$

كى يبرهن المتطابقة الأولى يفترض السموأل معرفة القارئ بمفكوك (أ + ب)^٢ المعطى فى كتاب (البديع) للكرجى ، ثم يتولى برهان المتطابقة فى حالة ن = ٣ ويحتوى البرهان على المرحلتين التاليتين :

$$(أ + ب) (أ + ب) (أ + ب) = (أ + ب) (أ^٢ + ٢ أ ب + ب^٢) (أ + ب)$$

$$= (أ + ب) (أ^٢ + ٢ أ ب + ب^٢) + (أ + ب) (أ^٢ + ٢ أ ب + ب^٢) + (أ + ب) (أ^٢ + ٢ أ ب + ب^٢)$$

$$= أ^٣ + ٣ أ^٢ ب + ٣ أ ب^٢ + ب^٣ + أ^٣ + ٣ أ^٢ ب + ٣ أ ب^٢ + ب^٣ + أ^٣ + ٣ أ^٢ ب + ٣ أ ب^٢ + ب^٣$$

$$= ٣ أ^٣ + ٩ أ^٢ ب + ٩ أ ب^٢ + ٣ ب^٣ \quad \text{مستخدما قانون التبادل}$$

(٣) بالطريقة نفسها يبرهن المتطابقة فى حالة ن = ٤

(٤) لم يبرهن حالة ن = ٥ ، وإنما حسب معاملات ذات الحدين حتى

ن = ١٢ مستخلصه من مؤلف الكرجى وقاعدة إنشائها عند الكرجى

تكافئ

$$\binom{n}{r} أ^r ب^{n-r} + \binom{n}{r-1} أ^{r-1} ب^{n-r+1} = \binom{n}{r} أ^r ب^{n-r}$$

تلك كما نرى هى البدايات الحقيقية لمبدأ الإستقراء الرياضى

بالمثل يتناول السموأل المتطابقة (أ ب)^٢ = أ^٢ . ب^٢

فهو يبرهن $(أ ب)^2 = أ^2 . ب^2$ من $أ^2 ب^2 = (أ ب)^2$ بضرب الطرفين في $أ ب$

$$(أ ب) . (أ^2 ب^2) = (أ ب)^2 . (أ ب) = (أ ب)^3$$

$$\text{ولكن } (أ ب) . (أ^2 ب^2) = (أ . أ^2) . (ب . ب^2) = (أ^3) . (ب^3)$$

$$\text{إذن } (أ ب)^3 = (أ^3) . (ب^3)$$

ثم يبرهن السموأل حالة $n = 4$ ويقول إنه بمثل هذا البرهان يمكن برهان الحالة العامة

مجموع الأعداد الطبيعية وقواها :

في كتاب (الباهر) للسموأل يرد التالي :

$$\text{برهن أن } \sum_{r=1}^n r = \frac{n(n+1)}{2}$$

والبرهان كما يلي :

$$\sum_{r=1}^n r = 1 + 2 + \dots + (n-1) + n$$

$$\sum_{r=1}^n r = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

$$\text{بالجمع نجد أن } \sum_{r=1}^n r = (1+n) + (1+n) + (1+n) + \dots$$

$$= n(n+1)$$

صحيح أن الأمثلة التي أعطيت في كتاب الباهر تتعلق بحالات مثل
 $n = 4$ ، أو 5 أو 6 لكن المنطق الذي إستخدم منطق عام ولا يحتاج إلا إلى
 صياغة له حتى تستكمل عناصر الإستقراء الرياضى بمعناها الحديث .

(٢) غالبا ما نقرأ فى كتب تاريخ الرياضيات أن الصيغة

$$\frac{n(n+1)(n^2+1)}{6} = \sum_{i=1}^n i^2$$

قد برهنت من قبل الكرجى لكن الأمر ليس كذلك فى الواقع .

فالكرجى أعطى صيغة مكافئة وهى

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{3} + n \frac{1}{3} \right)$$

لقد برهنت المتطابقة $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(n^2+1)}{6}$ من

قبل ابن الهيثم و يعود السموأل فى كتابه (الباهر) للبرهان عليها جبريا

(٣) كذلك يتضح من (الباهر) أنه كان على معرفة بالمتطابقة

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \left(\sum_{i=1}^n i \right)^2$$

ملحوظة :

الجزء الأخير من هذه المحاضرة والمتعلق بالإستقراء الرياضى
 مأخوذ من كتاب د.رشدى راشد (تاريخ الرياضيات العربية بين الجبر
 والحساب) طبعة بيروت .

عصر النهضة الأوروبية ومعادلات الدرجة الثالثة

يعتبر عصر النهضة في أوربا هو القرن السادس عشر والقرن السابع عشر الميلادى ، إذ أنه بداية اليقظة الأوروبية بعد أن غرقت أوربا فى ظلمات القرون الوسطى أمدا طويلا . ولقد كانت تلك الفترة بداية قيام نظام إقتصادى جديد (الرأسمالية) وإنهيار النظام الإقطاعى القديم ، وصحب ذلك قيام حركة الإصلاح الدينى على يد لوثر فى ألمانيا وكلفن فى سويسرا .

وقد إرتبطت هذه اليقظة الجديدة بالعودة إلى البحث فى التراث اليونانى العلمى الذى وصل أوربا أولا عن طريق الترجمات العربية ، كما كان علماء تلك الفترة على علم شبه كامل بالإنجازات العربية فى الرياضيات وذلك من خلال ترجمتهم للكتب العربية التى حصلوا عليها إما خلال الحروب الصليبية ، أو بعد ذلك من الأندلس أو صقلية . وحيث أن الإنجازات العربية فى الجبر كانت قد توقفت عند الحلول البينانية لمعادلات الدرجة الثالثة نتيجة تقاطع القطاعات المخروطية (الخيام) فقد كان من الطبيعى أن تتجه الجهود فى أوربا إلى البحث عن حل جبرى لمعادلات الدرجة الثالثة ومن بعدها معادلات الدرجة الرابعة ، وبدأت إنطلاقة جديدة لعلم الجبر وساعد على ذلك ظهور استخدام رمزية جديدة لهذا العلم على يد فيتا Vietta فى فرنسا .

ويعتبر الإيطالي سيسيو فرو Scipio Ferro (إيطالي) أول من قدم حلا
جبريا للمعادلة $s^3 + m s^2 = n$

وفي ذلك الزمان كان إكتشاف أمر كهذا يعتبر سرا عائليا لا يجوز
إفشاؤه ، وظل هذا السر مجهولا من الآخرين لمدة ثلاثين عاما (أوائل
القرن السادس عشر) إلى أن إكتشف الإيطالي تارتاجليا حلا للمعادلة

$$s^3 + m s^2 = n$$

وعندما علم كاردان بإكتشاف تارتاجليا للحل طلب منه أن يطلع
على هذا السر مع وعد ألا يذيع هذا لأحد أبدا . لكنه لم يحافظ على
وعده وقام بنشر الحل في مجلة إيطالية حوالى منتصف القرن السادس
عشر . وما زالت الكتب حتى اليوم تنسب الحل الجبرى لمعادلات
الدرجة الثالثة لكاردان ، مع أنه لم يكن أكثر من ناقل لهذا الحل .

(٢) الحل العام لمعادلات الدرجة الثالثة :

سوف نعرض خلال السطور التالية الحل العام لمعادلات الدرجة الثالثة
فى صورته النهائية كما نعرضه اليوم

(١) ولنعتبر المعادلة $s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 = 0$

فى هذه المعادلة يمكن دائما التخلص من الحد الثانى ($a_1 s^2$)
وذلك بالتعويض التالى

ضع $s = \frac{1}{3}$ في المعادلة (١)

فجد ان $\cdot = r_1 + (\frac{1}{3} - ص) r_1 + {}^2(\frac{1}{3} - ص) r_1 + {}^2(\frac{1}{3} - ص) r_1 + {}^2(\frac{1}{3} - ص) r_1$

معامل ص' هو $3 - \frac{1}{3}$ من الحد الأول ، أ، من الحد الثاني

أى أن المعادلة بهذا التعويض تتحول إلى معادلة من الدرجة الثالثة
فى ص على النحو التالى :

(۲) $\text{ص}^2 = \text{ق} + \text{ص} + \text{ك}$

وبالتالى يمكن اعتبار المعادلة (٢) هى الصيغة العامة لمعادلات الدرجة الثالثة ، إذ يمكن دائما القضاء على الحد الخاص بـ ^٢ باستخدام

التحويله س = ص - $\frac{11}{3}$

والآن نعتبر المعادلة (٢) ونضع

ص = ع - $\frac{ق}{ع^3}$ (۳) حيث ع متغير مجهول

بالتعويض في (٢)

$$0 = \text{ك} + \left(\frac{\text{ق}}{\text{ع}^3} - \text{ع} \right) \text{ق} + \left(\frac{\text{ق}}{\text{ع}^3} - \text{ع} \right)^2$$

وبالاختصار نجد أن هذه المعادلة تصبح

$$0 = \text{ك} + \frac{\text{ق}^3}{\text{ع}^{27}} - \text{ع}^2$$

$$(4) \quad \text{أو} \quad 0 = \frac{\text{ق}^3}{27} - \text{ع}^2 \text{ك} + \text{ع}^1$$

المعادلة (3) هي معادلة من الدرجة الثانية في ع^2 .

$$\sqrt{\frac{\text{ق}^3}{27} + \frac{\text{ك}^2}{4}} \pm \frac{\text{ك}}{2} = -\text{ع}^2$$

$$\sqrt{\text{ر}} \pm \frac{\text{ك}}{2} = -\text{ع}^2$$

$$\text{حيث } \text{ر} = \frac{\text{ق}^3}{27} + \frac{\text{ك}^2}{2}$$

وبالتالى

$$(5) \quad \frac{1}{3}(\sqrt{d} + \frac{2}{2} -) = 14$$

$$(6) \quad \frac{1}{3}(\sqrt{d} - \frac{2}{2} -) = 14$$

$$\frac{1}{3}(\frac{3}{27} - \frac{2}{4} - \frac{2}{4}) = 14$$

$$(7) \quad \frac{3}{3} - =$$

نفرض أن جذور (5) هي $\omega, \omega', \omega''$

وأن جذور (6) هي $\omega, \omega', \omega''$

على ضوء التحويل (3) ، والنتيجة (7) فإن جذور المعادلة (2) هي

$$\omega + \omega' = 1, \quad \omega + \omega'' = 2, \quad \omega' + \omega'' = 3$$

مثال: حل المعادلة $x^3 - 18x + 35 = 0$ ، هنا $q = -18$ ،

$$35 = -p$$

ضع $v = \frac{1}{E} + \frac{1}{E}$ في المعادلة التكعيبية

فحصل على المعادلة

$$0 = 216 + 35E^2 - E^3$$

$$E^3 - 35E^2 - 216 = 0 \quad \frac{1}{2} \pm \frac{35}{2} = E^2$$

$$\left[\frac{1}{2} \pm 35 \right] = \left(\sqrt{361} \pm 35 \right) \frac{1}{2} =$$

$$E_1 = 27, E_2 = 8$$

$$\omega_3, \omega_3, \omega_3$$

إذن الجذور الخاصة بـ E هي

$$\omega_2, \omega_2, \omega_2$$

$$\text{حيث } \omega = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}t), \omega' = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{3}t)$$

وبالتالي فإن جذور معادلة v هي

$$v_1 = 0, v_2 = \omega_2 + \omega_3, v_3 = \omega_2' + \omega_3'$$

$$\text{أى ص}_1 = 5, \text{ ص}_2 = -2 + \frac{1}{2}\sqrt{3}, \text{ ص}_3 = -2 - \frac{1}{2}\sqrt{3} \text{ ت}$$

(٣) مميز معادلة الدرجة الثالثة :

$$\text{ص}_1 = \text{أ} + \text{ب}, \text{ ص}_2 = \text{أ} + \omega \text{ب}, \text{ ص}_3 = \text{أ} + \omega^2 \text{ب}$$

$$\text{ص}_1 - \text{ص}_2 = (\text{أ} - \omega \text{ب}) + (\omega - 1) \text{أ} = \text{ص}_2 - \text{ص}_3$$

$$= ((\omega - 1) \text{ب} + \text{أ}) (\omega - 1)$$

$$= (\text{أ} - \omega^2 \text{ب}) (\omega - 1) \text{ لأن } \omega + \omega^2 + 1 = 0$$

$$\text{ص}_1 - \text{ص}_2 = \text{أ} + \text{ب} - \omega \text{أ} - \omega^2 \text{ب}$$

$$= (\text{أ} - \omega \text{ب}) + (\omega - 1) \text{أ}$$

$$= (\text{أ} - \omega \text{ب}) + (\omega - 1) \text{أ}$$

$$= (\text{أ} - \omega \text{ب}) - (\omega - 1) \text{أ}$$

$$= (\text{أ} - \omega \text{ب}) (\omega - 1)$$

$$\text{ص}_2 - \text{ص}_3 = (\omega - \omega^2) (\text{أ} - \text{ب})$$

إذن

$$(ص١ - ص٢)(ص٢ - ص٣)(ص٣ - ص١)$$

$$= (١ - \omega)(\omega - \omega^2)(\omega^2 - ١) =$$

$$= (١ - \omega^2)(\omega + ١ + \omega^2) =$$

$$= ٣ \sqrt{٣} (١ - \omega^2)$$

$$\text{ولكن } ١ - \omega^2 = \sqrt{٣}$$

$$\therefore (ص١ - ص٢)(ص٢ - ص٣)(ص٣ - ص١) = -١٠٨ ر (١)$$

الطرف الأيمن فى (١) يسمى مميز المعادلة وهو عبارة عن مربع حاصل ضرب الفرق بين الجذور ويرمز له عادة بالرمز م أى أن

$$م = -١٠٨ ر = -(٤ ق٣ + ٢٧ ك٢)$$

$$= -١٠٨ \left(\frac{ق٣}{٢٧} + \frac{ك٢}{٤} \right)$$

فإذا كانت جذور المعادلة التكعيبة كلها حقيقية فإن م لا بد أن يكون موجبا،

أى $r = \text{سالب}$ أى أن $\frac{q^3}{27} + \frac{k^2}{4}$ لابد أن يكون
سالباً فى حالة الجذور الثلاثة حقيقية

وإذا كان هناك جذران متساويان فى المعادلة فإن $m = \text{صفر}$ وبالتالى
 $r = 0$

وفى حالة وجود جذرين تخيلين مثلاً v_1 حقيقى ، v_2 ، v_3
تخيليان

$$\text{مثل } v_2 = m + n$$

$$v_3 = m - n$$

$$m^3 = (v_1 - v_2)(v_1 - v_3)(v_2 - v_3)$$

$$= (v_1 - m + n)(v_1 - m - n)(m + n - v_2)$$

$$= [(v_1 - m)^2 - n^2](m + n - v_2)$$

$$\text{أى أن } r = \text{موجب}$$

وإذن عند التعرض لمعادلة من الدرجة الثالثة يلزم أولاً بحث m ، أو

فإذا تبين أن r سالب فمعنى هذا أن الجذور الثلاث حقيقية

وإذا تبين أن $r = \text{صفر}$ فمعنى هذا أن هناك جذرين متساوين فى
المعادلة

وإذا تبين أن r موجب فمعنى هذا أن هناك جذر حقيقى والآخران
تخيليان

مثال: فى المعادلة السابعة $\text{ص}^2 - 18\text{ص} - 35 = 0$

$$r = \frac{\text{ك}^2}{4} + \frac{\text{ق}^3}{27}$$

هنا $\text{ق} = -18$ ، $\text{ك} = -35$

$$r = \frac{(-18)^3}{27} - \frac{(-35)^2}{4}$$

$$= \frac{864 - 1225}{4} = \frac{4 \times 216 - 1225}{4} = 216 - \frac{1225}{4} = \text{موجب}$$

إذن هناك جذر حقيقى وجذران تخيليان

أوجد جذور المعادلة

مثال:

$$(1) \quad 0 = \frac{16}{27} - \text{ص}^2 - \frac{4}{3} \text{ص}$$

$$\text{هناك} \quad \frac{4}{3} = -\text{ق} , \quad \frac{26}{27} = -\text{ك}$$

$$r = \frac{\text{ك}^2}{4} + \frac{\text{ق}^3}{27} = \frac{16 \times 16}{27 \times 27 \times 4} - \frac{4^3}{27 \times 3}$$

$$0 = \frac{64}{27 \times 27} - \frac{64}{27 \times 27} =$$

إذن هناك جذران متساويان ، والجذور كلها حقيقية .

لإيجاد الجذرين المتساويين يكفي أن نفاضل المعادلة (1) ونبحث عن جذر المعادلة التي جرى تفاضلها . أى

$$3 \text{ ص}^2 - \frac{4}{3} = 0 \quad \text{ص}^2 = \frac{4}{9}$$

$$\text{ص} = \pm \frac{2}{3}$$

أحد هاتين القيمتين لابد أن تحقق المعادلة (1) . بالتعويض

$$\text{ص} = -\frac{2}{3} \text{ في (1)}$$

نجد أنها تحقق المعادلة لأن

$$\text{صفر} = \frac{16 - 24 + 8}{27} = \frac{16}{27} - \frac{8}{9} + \frac{8}{27}$$

وبالتالي فالمعادلة (1) لا بد أن تكون على صورة

$$0 = \left(\frac{2}{3} + \text{ص}\right) \left(\frac{4}{3} - \text{ص}\right)$$

$$\therefore \text{الجدور هي ص} = \frac{4}{3}, \text{ ص} = -\frac{2}{3}, \text{ ص} = -\frac{2}{3}$$

(4) حالة الجذور الحقيقية المختلفة : في هذه الحالة $r = \text{سالب}$ ضع

$$= -\text{ل حيث ل موجب}$$

$$\therefore -\frac{k}{2} + \sqrt{s} = -\frac{k}{2} + \sqrt{l} = m \text{ (جاهد + ت جتاهد)}$$

$$\text{حيث } m^2 = \frac{k^2}{4} + l = \frac{k^2}{4} - \frac{k^2}{27} \text{ أى أن } m = \sqrt{\frac{k^2}{4} - \frac{k^2}{27}}$$

$$\text{م جتاه} = -\frac{ك}{2} \quad \text{إن جتاه} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{ك}{2}}{\sqrt{\frac{ق-3}{27}}}$$

$$\text{بالمثل} \quad -\frac{ك}{2} - \sqrt{س} = م \quad (\text{جاه} - \text{ت جتاه})$$

وتكون جذور المعادلة السادسة هي م $\frac{1}{3}$ (جاه + ت جتاه) $\frac{1}{3}$ ،

$$م \frac{1}{3} (\text{جاه} - \text{ت جتاه}) \frac{1}{3}$$

وتكون جذور معادلة الدرجة الثالثة هي

$$م \frac{1}{3} \text{جتا} \left(\frac{\theta + 2\pi}{3} \right) \quad \text{ن} = 0, 1, 2$$

$$\text{حيث م} = \sqrt{\frac{ق-3}{27}} \quad , \quad \text{جتا} \theta = -\frac{ك}{2م}$$

$$\text{مثال:} \quad \text{حل المعادلة} \quad س^3 + 9س^2 + 23س + 14 = 0$$

ضع $س = ص - 3$ وتتحول المعادلة إلى

$$\text{ص}^2 - \text{ع} - 1 = 0 \quad \text{ق} = -\text{ع} , \text{ك} = -1$$

$$ر = \frac{\text{ك}^2}{\text{ع}} + \frac{\text{ق}^3}{27} = \frac{1}{4} - \frac{1}{27} = \frac{64}{27} \text{ سالب}$$

إذن الجذور حقيقية ومختلفة

$$م = \sqrt{\frac{\text{ق}^3}{27}} = \sqrt{\frac{64}{27}} = \frac{8}{3\sqrt{3}}$$

$$\text{جتا ه} = -\frac{\text{ك}}{\text{م}^2}$$

من الجداول ه = 3° ٧١'

وبالحساب من جداول حساب المثلثات الجذور الثلاثة هي 2 م 3 جتا (3/θ) ،

$$2 م 3 جتا \left(\frac{\theta + 2\pi}{3} \right) , 2 م 2 جتا \left(\frac{\theta + 4\pi}{3} \right)$$

والجذور هي ص₁ = 1149ر₂ ، ص₂ = -860.8ر₁ ، ص₃ = -2541ر₀

$$\text{أمثلة للحل: (1) حل المعادلة س}^2 - 3\text{س}^2 + \frac{9}{\text{ع}}\text{س} - \frac{1}{2} = 0$$

(٢) أثبت أن إثنين من جذور المعادلة

$$س^٢ + ٢س - ٣ = ٠$$

تخيلية وأوجد قيمة الجذور الثلاث

(٣) حل المعادلة $س^٢ - ٢٤س - ٢٢ = ٠$

الجذور $\omega ٢ + \omega ٤$ ، $\omega ٢ + \omega ٤$ ، $\omega ٢ + \omega ٤$

(٤) حل المعادلة $س^٢ + ٩س - ٦ = ٠$

$$\frac{١}{٣} = ١ - ٣$$

الجذر الأول

إسحاق نيوتن

ولد نيوتن فى منتصف القرن السابع عشر بالدقة عام ١٦٤٢ - بعد وفاة جالبليو بعام واحد من عائلة من صغار الفلاحين بمقاطعة لنكولن بإنجلترا ، وقد مات والده قبل مولده وتكفلت والدته بتربيته ، وكانت معروفة فى القرية جرانثام Grantham بمزايا عديدة على عكس والده الذى كان معروفا بين جيرانه بالشراسة والإسراف . ونظرا لظروف الأسرة المالية المتواضعة فقد تزوجت والدته بعد وفاة والده وتركت الطفل فى حضانة جدته .

وقد عرف عن نيوتن فى صباه غرامه المبكر بالألعاب الميكانيكية التى يصنعها بنفسه مثل روافع المياه ونماذج الطواحين الهوائية ، وهذه القدرات المبكرة على إستخدام يديه لصناعة الآلات بنفسه قد أفادته فى المستقبل فى دراساته لظاهرة الضوء وفى إستخدام العدسات والمرايا وبناء التلسكوبات بعد ذلك لإستخدامها فى رصد الظواهر الفلكية .

ولقد قضى المرحلة الأولى من تعليمه فى مدرسة القرية ، وعندما بدأ خاله يستكشف قدراته غير العادية أقنع أمه بأن ترسل ابنها إلى كمبردج بدلا عن البقاء فى القرية كما كانت تعتزم لمساعدتها على إدارة شئون الأرض التى كانت تملكها بالقرية بعد وفاة زوجها الثانى .

والتحق نيوتن أخيراً بجامعة كمبردج بعد أن أنهى مدرسة
الأجرومية في قريته جرانثام ، وتعلم في الجامعة من دراسة أعمال
عمالقة عصره : ديكارت ، كبلر ، جاليليو . فمن ديكارت أخذ نيوتن
الهندسة التحليلية ، أي الهندسة الديكارتية الكارتيزية) .

ومن كبلر أخذ نيوتن القوانين الثلاث الأساسية لحركة
الأجسام السماوية والتي إكتشفها أمبريقيا بعد إثنين وعشرين عاما من
المشاهدات والحساب الفلكية المضنية .

ومن جاليليو أخذ نيوتن القانونين الأولين من قوانين
الحركة الثلاث التي أصبحت حجر الزاوية في ديناميكا نيوتن .

ولما كانت قوانين كبلر لحركة الأجسام السماوية قد لعبت
دورا حاسما في تطوير نيوتن لقانونه عن الجاذبية الكونية Universal
gravitation فقد يكون من المفيد ذكر هذه القوانين هنا .

- ١ - تدور الكواكب حول الشمس في مسار قطع ناقص ، وتقع
الشمس في بؤرة هذه القطاعات الناقصة .
- ٢ - الخط الواصل بين الكوكب والشمس يمسح مساحات
متساوية في ازمته متساوية .
- ٣ - يتناسب مربع زمن الدورة الكاملة لكل كوكب مع مكعب
متوسط المسافة بين الكوكب والشمس وهذه القوانين
الثلاث التي إكتشفها كبلر عمليا يمكن الآن برهنتها رياضيا
في صفحة أو صفحتين بإستخدام التفاضل والتكامل مطبقة

على قانون نيوتن عن الجاذبية الكونية والذي ينص على
أن:

"كل جسمين يجذبان بعضهما البعض في هذا
الكون بقوة تتناسب طرديا مع كتلة كل منهما وعكسيا مع
مربع المسافة بين الجسمين"

فإذا كانت كتلة الجسمين هي m_1 ، m_2 ، والمسافة
بينهما r فإن قوة التجاذب بينهما هي

$$F = \frac{G \times m_1 \times m_2}{r^2}$$

حيث G ثابت التناسب

وباستخدام وحدات مناسبة يمكن جعل $G = 1$ وتكون قوة

$$F = \frac{m_1 \times m_2}{r^2}$$

التجاذب

والآن سندكر قوانين نيوتن الثلاث في الديناميكا:

- ١ - كل جسم يسير بسرعة منتظمة يظل مستمرا في حركته هذه
ما لم تؤثر عليه قوة تغير من حاله .
- ٢ - معدل التغير في عزم نقطة بادية (العزم = السرعة \times الكتلة)
يتناسب مع القوة المؤثرة ويكون إتجاهه في إتجاه القوة .
- ٣ - كل فعل له رد فعل مساو له ومضاد في الإتجاه .

وأهم شئ فيما يتعلق بهذه القوانين - من وجهة نظر
الرياضيات - هو الجملة الواردة في القانون الثانى ، أى " معدل
التغير " ، ولما كانت الكتلة ثابتة عند نيوتن فقد كان عند نيوتن حساب

معدل تغير السرعة . ولقد كان حل نيوتن لهذه المسألة هو المفتاح
السحري لموضوع المعدلات وقياسها ، أى لموضوع حساب التفاضل .
وبلغتنا المعاصرة فإن معدل تغير السرعة ع بالنسبة للزمن ن هو المعامل
التفاضلى $\frac{dE}{dN}$.

ولقد إكتشف نيوتن بعد ذلك قواعد حساب التكامل ثم
إكتشف بعد ذلك العلاقة العكسية بين حساب التفاضل وحساب التكامل .
لقد تعلم نيوتن على يد الأستاذ Barrow ، وإكتشف الأستاذ
بارو بالتدريج ان تلميذه على مستوى من النبوغ يندر تكراره ، فما كان
من الأستاذ إلا أنه قدم إستقالته للجامعة فى عام ١٦٦٨ تاركا كرسى
الأستاذية لتلميذه نيوتن الذى كان قد حصل على البكالوريوس من
الجامعة فى يناير عام ١٦٦٤ م .

وفى عام ١٦٦٤ - ١٦٦٥ أصيبت إنجلترا بالوباء الكبير الذى
حصد آلاف الأرواح ، وقد إستمر هذا الوباء فى العام التالى وإن كان
بشكل مخفف . فى هذه الظروف أغلقت الجامعة وعاد نيوتن إلى قريته
حيث قضى سنتين هناك إبتكر فيها نيوتن ما عرف بإسم طريقة
(Fluxions) وهو الإسم الذى إستخدمه للتعبير عن حساب معدلات التغير
أى حساب التفاضل ، كما إكتشف قانون الجاذبية الكونية ، وأثبت
بالتجربة أن الضوء الأبيض يتكون من أضواء بألوان مختلفة . وكل هذا
قبل أن يبلغ نيوتن الخامسة والعشرين .

ولقد سميت الطريقة Fluxion من فكرة التدفق flowing ،

أى حساب معدلات التدفق .

كذلك أعاد نيوتن خلال تلك الفترة إكتشاف نظرية ذات

الحدين . (لاحظ أن الحضارة العربية الإسلامية كانت قد إكتشفت تلك النظرية لأس صحيح موجب قبل ذلك بكثير كما سبق أن ذكرنا) .

ورغم أن برهان نظرية ذات الحدين لأس سالب أو كسرى

لم يكتشف إلا فى القرن التاسع عشر إلا أن نيوتن كان يستخدمها فى كل الحالات دون تحفظ . ومن حسن الحظ أن الحالات التى استخدمها فيها كانت صحيحة .

ومن المهم أن نذكر أن الدقة والإحكام فى البراهين لم

تعرف حتى ظهور جاوس فى أواخر القرن الثامن عشر وأوائل القرن التاسع عشر ، فإليه أساسا يرجع الفضل فى إحكام البراهين ، وتوضيح متى تكون نظرية ما صحيحة ومتى لا تكون .

والآن نتعرض لمفهوم نيوتن عن حساب التفاضل :

إن الأفكار الأساسية الآن فى حساب التفاضل هى : المتغير ، الدالة ، النهاية . وفكرة النهاية أخذت وقتا طويلا حتى أصبحت واضحة . أما فكرة الدالة فيبدو أن لينتز هو الذى أدخلها عام ١٦٩٤ ، ومنذ ذلك الوقت بذل جهود كثيرة حتى أصبحت فكرة مفهوم الدالة كراسم محددة تماما .

وسوف نتبين أنه بالنسبة للأوائل أمثال نيوتن وليبنتز كان مفهوم الدالة والنهاية حدسياً أى يقوم على الحدس . أما الآن فنحن نحدده كما يلى :

نفرض $\Delta s = D(s)$

ونفرض أن زيادة فى s Δs يترتب عليها زيادة فى

Δs

$\therefore \Delta s + \Delta s = D(s + \Delta s)$

أى $\Delta s = D(s + \Delta s) - D(s)$

ويكون معدل التغير $\frac{\Delta s}{\Delta s}$ هو . وإذا تصورنا أن Δs

تقترب من الصفر فإن Δs تقترب أيضاً من الصفر ، لكن $\frac{\Delta s}{\Delta s} \neq$

تقترب من الصفر عموماً بل تصبح لها نهاية هى ما نرمز له بالرمز $\frac{D(s)}{D(s)}$.

مثلاً نفرض أن $D(s) = s^2$

$$\Delta s = \frac{s^2 - (s + \Delta s)^2}{\Delta s} = \frac{s^2 - s^2 - 2s\Delta s - \Delta s^2}{\Delta s} = -2s - \Delta s$$

وعندما تقترب s من الصفر فإن

$$\frac{\Delta s}{\Delta s} \text{ تقترب من } -2s$$

$$\text{أى} \quad \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} \leftarrow 2 \text{س}$$

$$\text{أى أن} \quad \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 2 \text{س}$$

وسوف نلاحظ أن هذه الرمزية فى حساب التفاضل إنما

يعود الفضل فيها إلى لينتز وليس إلى نيوتن .

وأقرب الأمثلة على معدلات التغير فى الفيزياء هو السرعة والعجلة ،

فالسرعة هى معدل تغير المسافة بالنسبة للزمن ، والعجلة هى معدل تغير

السرعة بالنسبة للزمن . أى أن

$$\text{السرعة ع} = \frac{\text{د ف}}{\text{د ن}} ، \text{العجلة هى} \frac{\text{د ع}}{\text{د ن}} = \frac{\text{د}^2 \text{ف}}{\text{د}^2 \text{ن}}$$

وهكذا يمكن تعريف المشتقه الثانية أو الثالثة ... إلخ

وإن كانت المشتقتان الأولى والثانية هى الأكثر أهمية عند تطبيق

التفاضل على علم الفيزياء وقد إستطاع نيوتن بعد ذلك تعريف العملية

العكسية للتفاضل (التكامل) والوصول إلى النظرية الأساسية فى حساب

التفاضل والتكامل والتي تنص على أن المساحة تحت المنحنى ص =

د (س) بين النقطتين أ ، ب تعطى بالتكامل

$$\int_a^b \text{د (س)} \text{ دس} = \text{ق (ب)} - \text{ق (أ)}$$

حيث ق (س) هى الدالة التى لو فاضلناها أعطتنا د (س) ،

أو بمعنى آخر التكامل غير المحدود $\int \text{د (س)} \text{ دس} = \text{ق (س)}$

تلك هي النظرية الأساسية في حساب التفاضل والتكامل
التي إكتشفها نيوتن كما إكتشفها ليبنتز بشكل مستقل .

عندما عاد نيوتن إلى كمبردج بعد إنتهاء الوباء إنتخب زميلا في كلية
ترينتي وفي عام ١٦٦٩ عين أستاذا لكرسى الرياضيات بعد بارو ، وبدأ
في إلقاء محاضراته عن البصريات Optics وفي هذه المحاضرات قدم
نيوتن نظرية الجسيمات في الضوء (الضوء يصدر على هيئة جسيمات
في خط مستقيم) بدلا من نظرية هايجنز الذي كان يرى أن الضوء
ينتشر على شكل موجات . ورغم التناقض الظاهر بين النظريتين فقد
أمكن التوفيق بينهما - من الناحية الرياضية البحتة - عن طريق نظرية
الكم الحديثة . ولذا فليس صحيحا تمام أن يقال اليوم - كما كان يقال
من قبل - أن نيوتن كان مخطئا تماما في نظرية الجسيمات .

وفي السنة التالية بنى نيوتن بيديه تلسكوب عاكس
إستخدمه لمشاهدة الأفلاك التي تدور حول المشتري Japiter (أكبر
الكواكب السيارة وخامسها من ناحية البعد عن الشمس) ، وكان هدف
نيوتن من ذلك أن يرى ما إذا كانت الجاذبية هي كونية حقا عن
طريق - رصد حركة الأفلاك حول المشتري .

وفي عام ١٦٧٢ إنتخب نيوتن عضوا في الجمعية الملكية
البريطانية التي كانت منشأة حديثا ، فقدم للجمعية نتائج أبحاثه عن
التلسكوبات ونظرية الجسيمات في الضوء وأثارت هذه الأبحاث

خلافات مع زملاء له فى الجمعية الملكية ، ولم يكن فى طبع نيوتن
تقبل النقد بصدر رحب فقد كان معروفا بحساسيته الشديدة .

لكن السنوات ١٦٨٤ - ١٦٨٦ كانت سنوات هامة فى تاريخ
نيوتن ، فقد وافق تحت ضغط الفلكى هالى Halley على أن يعد كل
إكتشافاته الفلكية الديناميكية للنشر .

وأدى هذا به إلى إنجاز عمله الكبير المعروف باسم
" المبادئ الرياضية للفلسفة الطبيعية "

ويسمى أحيانا على سبيل الإختصار Principia Mathematica

وفى عام ١٦٨٦ قدم الكتاب إلى الجمعية الملكية الذى تولى هالى
طبعه على نفقته . والجزء الأول من الكتاب يحتوى على مبادئ
الديناميكا ، والثانى يحتوى على حركة الأجسام فى وسط مقاوم وحركة
السوائل ، والثالث يحتوى على حركة الأجسام السماوية على ضوء
قانونية الجاذبية الكونية ، وفيه إستنتج نيوتن رياضيا ما أثبتته كبلر
أمبريقيا، كما قدم نيوتن النظرية الهامة جدا المعروفة - باسم نظرية
التذبذب Perturbation فالقمر مثلا ليس منجذبا إلى الأرض فقط وإنما
إلى الشمس أيضا ، ولذا فإن مسار القمر بتذبذب بسبب جذب الشمس .

وبعد نشر الكتاب بسنوات قليلة بدأ تدريس النظام النيوتونى
فى كمبردج (١٦٩٩) ثم فى إكسفورد (١٧٠٤) . وقد تردد الرياضيون
الفرنسيون فى قبول هذا النظام ، لكنهم قبلوه فى النهاية . والغريب أن

أعظم من خلف نيوتن فى تطوير هذا النظام بعد ذلك كان من فرنسا
وليس من إنجلترا (لا بلاس)

ويعتبر هذا العمل (المبادئ الرياضية للفلسفة الطبيعية) هى أعظم ما
فى تاريخ نيوتن ، وما جاء بعد ذلك من أحداث ليس لها أهمية هذا
العمل .

لقد دخل نيوتن فى مشاكل السياسة البريطانية وعلاقة
الجامعات بالملكية، ودخل نيوتن عضوا فى مجلس العموم ، وقد
تصدى نيوتن للملك جيمس الثانى الذى كان يريد أن يطوى
الجامعات تحت جناحه ، وقد هرب جيمس الثانى بعد ذلك ليحل
محلّه William of Orange وزوجته ماري ، وقد بقى نيوتن فى مجلس
العموم حتى حله عام ١٦٩٠ .

وفى عام ١٦٩٩ عين نيوتن مديرا لإدارة سك النقود
(Master of Mint) وهى وظيفة مرتبها كبير وذات مكانة مرموقة فى
الحياة البريطانية .

وفى عام ١٦٩٣ سمع نيوتن لأول مره أن حساب التفاضل
والتكامل أصبح معروف تماما فى القارة الأوربية وأن الفضل ينسب عادة
إلى ليبنز .

وهكذا بدأت المعركة بين أنصار نيوتن وأنصار ليبنز
وتحولت إلى مشاعر وطنية فوقف الشعب الإنجليزى خلف نيوتن متهما
ليبنز بأنه لص وكاذب والحقيقة أن سلوك نيوتن فى هذه المعركة لم

يكن نظيفا . ولقد إنتهت المعركة تاريخيا بالتثبت بأن كلا من نيوتن وليبنتز قد وصل إلى نتائجهم بشكل مستقل عن الآخر ، وإن كان ليبنتز قد سبق نيوتن في النشر بنحو عشرين عاما .

وقد إنتخب نيوتن رئيسا للجمعية الملكية البريطانية عام ١٧٠٣ ، وفي عام ١٧٠٥ منحته الملكة آن لقب فارس فأصبح سير إسحاق نيوتن . وقد أعيد إنتخابه رئيسا للجمعية الملكية حت وفاته عام ١٧٢٧ حيث دفن في مقابر العظماء (ويست منستر آبي) Westminster Abbey .

كارل فريدريك جاوس

(أمير الرياضيين) (١٧٧٧م - ١٨٥٥م)

أرشميدس ، نيوتن ، جاوس هؤلاء الثلاثة طراز وحده بين الرياضيين العظام . فالثلاثة كانوا البادئين بموجات جديدة فى الرياضة البحتة والتطبيقية : فى حالة أرشميدس كان له العديد من التطبيقات والإقتراحات فى مجال الروافع والكثافة النوعية ... إلخ ومع ذلك فقد كان يرى أن بحوثه فى الرياضة البحتة أعلى قدرا من جميع مخترعاته . ونيوتن كان يرى أن المبرر الرئيسى لإكتشافاته فى الرياضة البحتة (علم التفاضل والتكامل) هو تطبيقاتها ، بينما أعلن جاوس أنه سيان بالنسبة إليه أن يبحث فى مجال الرياضة البحتة أو التطبيقية ، وقد صرف جاوس عشرين سنة من عمره فى حساب مسار أحد الكواكب فى علم الفلك ، وثبت بعد ذلك بالمشاهدة أن المواقع التى حددها لمسار الكوكب كانت دقيقة تماما . ورغم ذلك فإن درة أعمال جاوس هى إكتشافاته فى علم الحساب العالى ، وهو فرع فى عصره كان له أقل التطبيقات . ولد جاوس فى الثلث الأخير من القرن الثامن عشر ومات فى حوالى منتصف القرن التاسع عشر (ولد ١٧٧٧ م ومات ١٨٥٥ م) فى برونزفيج (ألمانيا) من أبوين فقيرين . كان جده فلاحا فقيرا إستقر فى برونزفيج

وعمل بستانيا ، وأنجب والد جاوس (جير هارد) الذى عمل هو بدوره بستانيا ومظهر ترع وصانع لقوالب الطوب . وكان والد جاوس رجلا مكافحا حازما مع اولاده إلى حق القسوة أحيانا . لذلك عمل كل مافى وسعه لكى ينضم إليه اولاده فى العمل دون سلوك طريق التعليم . ولكن جاوس مضى فى طريق التعليم بفضل أمه وعائلتها التى كانت تدرك أهمية التعليم كطريق للحراك الإجتماعى ، وعلى وجه الخصوص خاله فردريك الذى لعب دورا هاما فى تشجيعه على التعليم وفى تدليل الصعاب التى واجهت جاوس .

ولم ينس جاوس فضل أمه عليه ، فالإثنان والعشرون سنة الأخيرة من حياتها قضتها فى منزل جاوس بعد زواجه ، وكان جاوس يصر على أن يقوم بخدمتها بنفسه - خصوصا بعد أن أصابها العمى - وكان يتولى تمريرها وإعطائها الدواء إلى أن ماتت عام ١٨٣٩ .

ظهر نبوغ جاوس فى مرحلة مبكرة جدا من حياته ، وهو فى الثالثة من عمره فيحكى أنه فى أحد أيام السبت كان والده يجرى حسابات اجور العمال الذين يشرف عليهم ، ودون إنتباه إلى أن ابنه يتابع العمليات الحسابية التى كان يجريها بصوت عال فوجئ الأب بإبنه يقول له إن فى حساباته خطأ وأن الرقم الصحيح هو .. كذا . وراجع الأب حساباته ليجد أن ما قاله الإبن هو الصحيح .

وفى المدرسة الابتدائية أظهر نبوغا واضحا ايضا . فعندما كان المدرس يكلف التلاميذ بإجراء عمليات جمع لمتابعات حسابية ، إذ به يجد أن جاوس كتب الإجابة فور كتابة السؤال على السبورة . وهكذا نشأت صداقة حميمة بين الطفل جاوس ومساعد المدرس (بارتلز) (Bartels) الذى كان من عشاق الرياضيات . واخذ الإثنين يدرسان معا ويساعدان بعضهما البعض ، ويتحققان معا من صحة براهين المسائل التى كانا يبحثان حلها .

من هذا العمل المبكر نشأت بعض إهتمامات جاوس طوال حياته . لقد أجاد إستخدام نظرية ذات الحدين عن مفكوك $(s+1)^n$ ، حيث ن ليس بالضرورة عدد صحيح موجب

$$(s+1)^n = 1 + \frac{n}{1}s + \frac{n(n-1)}{2 \times 1}s^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2 \times 1}s^3 + \dots$$

فى حالة ن ليست عددا صحيحا موجبا فإن هذه المتسلسلة لانهاية . ولذا فقد بدأ لجاوس أن من الضرورى فرض شروط على قيمة س فى هذه الحالة حت نضمن أن تكون المتسلسلة قريبة من نهاية معينة ، وإلا إكتشفنا أن المتسلسلة تعطى سخافات غير مقبولة .

مثلا إذا أخذنا $s = -2$ ، $n = -1$ فإن الطرف الأيمن فى

$$\text{المفكوك يعطى } (-1)^{-1} = -1$$

$$\text{بينما الطرف الأيسر يعطى } 1 + 2 + 4 + 8 + \dots$$

وطبعا ليس ن المقبول أن يكون مجموع أعداد صحيحة

موجبة هو عدد سالب .

قبل أن يفكر جاوس فى هذه المسألة : متى تتقارب متسلسلة مثل ذات
الحدين لأس غير صحيح وموجب ، لم يهتم التحليليون ببحث هذه
المسألة بهدف تفسير السخافات والألغاز التى تنتج عن الإستخدام غير
الحذر للمتسلسلات اللانهائية .

وهكذا وضع جاوس شرطاً دقيقاً لتقارب متسلسلة ذات
الحدين وبرهن عليه (هذا الشرط هو $|s| < 1$) .

والمثير أن جاوس كان أول المدققين Rignists فى مجال
التحليل الرياضى . وقد غير هذا الجهد من كل جوانب الرياضيات بعد
ذلك . فكل المحللين الكبار قبل جاوس مثل نيوتن وليبنيز وأويلر
ولاجرانج ولابلاس لم يكن لديهم أى تصور عن البرهان الصحيح فى
العمليات اللانهائية .

إن الدقة التى فرضها جاوس على علم التحليل الرياضى قد
خيمت منذ ذلك العصر على الرياضيات ، وأثرت تأثيراً عميقاً فى
معاصرى جاوس (آبل ، كوشى) وعلى خلفائه (فيشتراس ، Dedekind) .
فالرياضيات بعد جاوس أصبحت مختلفة تماماً عن رياضيات نيوتن
وأويلر ولاجرانج .

وبهذا المعنى فإن جاوس قد أحدث ثورة فى العلوم
الرياضية ، بمعنى أنه نقلها نقلة مختلفة كيفياً عما سبقها .

ثم يكتف بارتلز (مساعد المدرس الذى أصبح صديقا حميما لجاوس) بمساعدة جاوس فى حل ألغاز علم الجبر ، بل إنه ساعده عن طريق آخر . فقد كان بارتلز على صلة ببعض ذوى النفوذ الذين أقنعهم بنبوغ جاوس . فقام هؤلاء بلفت نظر دوق برونزفيك (الدوق كارل فرديناند) إلى تلك المسألة . وهكذا إستقبل الدوق جاوس لأول مره عام ١٧٩١ م ، وكان عمر جاوس ١٤ سنة ، واقتنع بنبوغه . وهكذا احتضنه الدوق وتكفل بتغطية نفقات تعليمه ومعيشته بعد ذلك .

وكان جاوس متفوقا أيضا فى اللغات ، ميالا بشدة إلى الفلسفة .

وقد تعلم فى كلية كارولين حيث درس أعمال أويلر ولاجرانج ونيوتن . وبينما كان جاوس لا يزال تلميذا فى الكلية بدأت أبحاثه فى علم الحساب العالى ، وهى الأبحاث التى خلده وأدخل لأول مره مفهوم التطابق congruence فى علم الحساب ونعرفه كما يلى :

إذا كان الفرق $a - b$ أو $b - a$ لعدد a ، b يقبل القسمة دون بواقى على عدد m قبل أن a ، b متطابقان بالنسبة للمقياس m modulus وتكتب هكذا

$$a \equiv b \pmod{m} \quad (a \equiv b \text{ (مق } m))$$

$$100 \equiv 2 \pmod{7} \text{ أو } 35 \equiv 2 \pmod{7} \quad \text{مثلا}$$

(// وهكذا وميزة هذه الفكرة أنها تحصر مفهوم القسمة " الزئبقى " فى

رمزية محددة ، وتساهم في أن تنقل إلى علم الحساب بعض العمليات التي تعود إلى نتائج مميزة في علم الجبر .

مثلا : نفرض x تشير إلى عدد مجهول ، r ، m أعداد معلومة حيث r غير قابل للقسمة على m هل هناك حل للمعادلة

$$x^2 = r \pmod{m}$$

إذا كان هناك عدد x يحقق هذه المعادلة فإن r يقال له الباقي التربيعي quadratic residue للعدد m .

وإذا لم يكن هناك عدد x يحقق هذه المعادلة قيل إن r هو اللاباقي التربيعي quadratic non-residue لعدد m .

مثلا هل 13 باقى تربيعي للعدد 17 ؟

نعم إذا كان من الممكن حل المعادلة $x^2 = 13 \pmod{17}$

إذا حاولنا $x = 1, 2, 3, \dots$ فسوف نجد أن $x = 8, 25, 42, \dots$ كلها حلول أى أن $8^2 = 13 + 3 \times 17$, $25^2 = 625 = 13 + 36 \times 17$ ، وهكذا ... 17

لكن لا يوجد حل للمعادلة $x^2 = 5 \pmod{17}$

من الطبيعي أن نتساءل : إذا علم m فى $x^2 = r \pmod{m}$ ، ما هى الأعداد r الممكنة وغير الممكنة عندما نأخذ x القيم 1 ، 2 ، 3 ، ...

ومن الممكن إثبات أنه يكفي طرح هذا السؤال إذا كان r, m أعداد أوليه . وعلى هذا يمكن طرح السؤال على النحو التالي : إذا كان p عددا أوليا معطى فأى عدد أولى q يجعل المعادلة $x^2 = q \pmod{p}$ قابلة للحل ؟

هذا السؤال صعب وما زال بدون حل حتى اليوم . ولكن مع ذلك أمكن لجاوس أن يكتشف علاقة تعاكسية جميلة بين زوجي التطابق $x^2 = q \pmod{p}$, $x^2 = p \pmod{q}$ حيث q, p عددان أوليان .

وتنص هذه النظرية على أن هذين التطابقين قابلان للحل معا أو غير قابلين للحل معا ، إلا إذا كان الباقي بعد قسمة كل من q, p على أربعة هو ٣ . وفي هذه الحالة فإن لأحد التطابقين حل وليس للآخر حل .

هذا القانون يعرف بإسم قانون التعاكس التربيعي Law of quadratic reciprocity . ولم يكن هذا القانون سهلا في برهانه ، لقد استعصى على أويلر ولاجندر ، لكن جاوس أعطى أول برهان له وهو في التاسعة عشر من عمره .

مثال عددي :

(أ) اعتبر كلا من $x^2 = 13 \pmod{5}$, $x^2 = 5 \pmod{13}$

عند القسمة على أربعة فإن باقى ٥ ، ١٣ هو ١ . وعلى هذا
فحسب النظرية السالفة فإن التقريرين إما قابلان للحل معا أو
غير قابلين للحل معا.

والحقيقة أنهما غير قابلين للحل .

(ب) أيضا الباقي عند قسمة ١٣ ، ١٧ على أربعة هو ١ . إذا فإن
التطابقين

$$x^2 = 13 \pmod{17}, x^2 = 17 \pmod{13}$$

إما قابلين للحل معا أو غير قابلين للحل معا .

والحقيقة أنهما قابلان للحل

فالتطابق الأول حلوله ٨ ، ٥ ، ٤٢ ، ...

والثانى حلوله ٢ ، ١٥ ، ٨ ، ...

(ج) اعتبر $x^2 = 11 \pmod{19}, x^2 = 19 \pmod{11}$

عند قسمة ١٩ ، ١١ على ٤ فإن الباقي هو ٣ ، على هذا

فأحد التطابقين قابل للحل والآخر لا حل له وبالفعل

الأول غير قابل للحل . أما الثانى فحلوله

$$= 7, 26, 45, \dots$$

عندما ترك جاوس كلية كارولين فى اكتوبر ١٧٩٥ لدخول جامعة

جوتنجن (وكان لا يزال مترددا بين دراسة الرياضيات او دراسة

الفلسفة) كان قد إبتكر طريقة المربعات الصغرى التى لا تزال حتى

اليوم من الأدوات الأساسية لعلم الإحصاء ، وكان هذا العمل هو

بداية إهتمام جاوس بنظرية أخطاء المشاهدات ، وأدى هذا به إلى

إقتراح التوزيع الطبيعي (توزيع جاوس) للتعبير عن أخطاء المشاهدات ، وما يزال هذا التوزيع حتى اليوم يعتبر أهم التوزيعات الإحصائية .

ويعتبر مارس ١٧٩٦ بداية نقطة التحول في مستقبل جاوس . ففي هذا التاريخ وقبل شهر واحد من عيد ميلاده العشرين إتخذ جاوس قراره لصالح الرياضيات وإن بقيت دراسة اللغات هواية عمره لكن الفلسفة فقدته نهائيا .

ولقد قضى جاوس خريف عام (١٧٩٨) - وكان عمره ٢١ سنة - في برونزفيك يضع اللمسات الأخيرة لمؤلفه العظيم "بحوث حسابية" Arithmetical Reserches وإن كان الكتاب لم ينشر إلا عام ١٨٠١ نتيجة بعض الصعوبات في مطابع ليبزج ، وقد أهدى جاوس هذا الكتاب إلى دوق برونزفيك الذي تكفل بمساعته ماليا حتى حصوله على الدكتوراه من جامعة هلمشتد Holmstedt

(وموضوعها برهان جديد للنظرية الأساسية لعلم الجبر وتنص على أن: كل معادلة جبرية في مجهول واحد س لها جذر) فقد برهن جاوس على أن كل جذور المعادلة الجبرية هي من نوع $a + b\sqrt{-1}$ ، حيث a, b أعداد مركبة . وكان جاوس أول من أعطى الأعداد المركبة تفسيرا هندسيا في المستوى .

ويعتبر كتاب " بحوث حسابية " واحدا من القمم الرياضية ، وما زال البعض يعتقد أنه أعظم أعمال جاوس ، وربما كان هذا العمل آخر أعماله في الرياضه البحتة المستقلة .

بعد نشر هذا المؤلف إتجه جاوس لتوسيع نطاق بحوثه ليشمل الفلك ، والمغناطيسية الكهربائية ، وباقي فروع الفيزياء الرياضية وإن ظل الحساب هو حبه الأول . وسنعطى هنا فكرة موجزة عن محتويات هذا المؤلف (بحوث حسابية) .

فهو يشمل مناقشة تفصيلية للتطابق ذى الحدين $x^n = A \pmod{p}$ حيث A أعداد n أعداد إختيارية وحيث p عدد صحيح أولى معلوم ، x هو العدد الصحيح المجهول . وفي هذا الكتاب يقدم نظرية البواقي التربيعية وأول برهان لقانون التعاكس التربيعي باستخدام الإستنتاج الرياضى .

وفي أجزاء أخرى من الكتاب يناقش جاوس نظرية الصيغ التربيعية الثنائية binary quadratic forms ، وتعلق بالبحث عن حلول صحيحة (أعداد صحيحة) x, y فى المعادلة

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = m$$

حيث a, b, c, m أعداد صحيحة معلومة

وفي البحث الأخير لهذا الكتاب يطبق جاوس النتائج السابقة فى مناقشة المعادلة

$$x^n = 1$$

حيث n عدد صحيح مجمعا الحساب والجبر والهندسة في

نموذج واحد

لاحظ: أن المعادلة $x^n = 1$ هي الصياغة الجبرية للمسألة

الهندسية عن كيفية تقسيم محيط دائرة إلى n من الأقسام المتساوية .

وأخيرا نود الإشارة في هذا القسم إلى أن بعض نتائج هذا

الكتاب كانت مكتشفه من قبل على يد فرمات وأويلر ولاجرانج . لكن

عبقريه جاوس تبدو في انه عالج كل هذه المسائل ضمن منهجية

واحدة فخرجت كل النتائج الجزئية بشكل سهل وطبيعي ، فمثلا كان

فرمات قد برهن على أن كل عدد أولي على صورته $4n + 1$ هو

مجموع مربعين ، وإن كان برهانه صعبا ومطولا ، مع أن هذه النظرية

بدت من خلال معالجة جاوس للصيغ التربيعية الثنائية أمرا طبيعيا

وسهلا .

ومعنى هذا كله أن جاوس أعطى بحوث الحساب توجهها

جديدا بعد أن كان مجموعة من النتائج المتفرقة ، وهكذا أصبحت

نظرية الأعداد فرعاً رياضياً يقف على قدم المساواة مع الجبر

والتحليل ... إلخ

الإنجاز العظيم الثاني لجاوس هو في علم الفلك في أول القرن

التاسع عشر . ففي ذلك الوقت كانت الكواكب المعروفة لدى العلماء

سبعة - وهو ما اعتقد الفلاسفة أنه العدد الصحيح - لكن الفلكيين

أخذوا يبحثون فى السماوات عن كواكب أخرى ضمن العائلة الشمسية . وقد إكتشف أحدهم فى أول القرن التاسع عشر بإستخدام التلسكوب كوكبا جديدا يدعى Ceres وهو أول واحد من مجموع كواكب ثانوية معروفه اليوم .

ومن المفارقات الغريبة أن تصادف هذا الحدث مع نشر مقال للفيلسوف الألمانى الكبير هيغل يتضمن هجوما ساخرا على الفلكيين لقيامهم بالبحث عن كوكب ثامن مع انه " لو منح الفلكيون الفلسفة بعض الإهتمام لرأوا على الفور ان هناك سبعة كواكب فقط : لا أكثر ولا أقل "

لكن إكتشاف Ceres كان صفة لهيغل والفلاسفة الذين ساندوه فى رأيه، وإن كان هذا الإكتشاف قد أساء إلى الرياضيات . إذ شغل جاوس بحساب مساره وقضى فى هذا سنوات عدة بلغت العشرين (تذكر أن أعمال نيوتن فى "الميكانيكا السماوية" كانت النموذج عند باحثى ذلك الزمان) . ولم يكن سيرس وحده مسئولا عن إنقطاع جاوس لهذا العمل . فالحقيقة أن والده وأصدقائه كانوا يلحون عليه بالقيام بعمل "مفيد" يدخل به السعادة إلى قلب دوق برونز فيك الذى تكفل برعايته مالية . فهاهو كوكب جديد فى موقع فى السماء يجعل حساب مساره أمرا صعبا . فلماذا لا يقوم بذلك ؟

وفى عام ١٨٠٩ نشر جاوس جوهرته الثانية "نظرية حركة
الأجسام السماوية فى قطاعات مخروطية". وجاء الاعتراف الدولى
بجاوس كأحد القمم إثر هذا النشر.

سأل العالم الرحاله المشهور فون هامبولت الرياضى
الفرنسى لابلاس : من هو أعظم رياضى فى ألمانيا فى رأيه ؟ فاجاب
بلاس : فاف Pfaff . فقال فون هومبلت : ولكن ماذا عن جاوس ؟
فقال لابلاس : جاوس هو أعظم رياضى فى العالم .

العقد الذى تلا إكتشاف مسار سيرس Ceres كان مليئا بالسعادة
والأسى . لقد تزوج جاوس فى اكتوبر ١٨٠٥ وأنجب من زوجته ثلاثة
أطفال . لكن زوجته ماتت بعد سنوات أربع إثر ولادة ، فتزوج بعد
ذلك صديقة لزوجته حتى تربي الأطفال وأنجب من زوجته الجديدة
ولدان وبنت .

ولقد تصادف هذا مع هزيمة الدوق فرديناند على يد
نابليون الذى أخذ يزحف على ألمانيا ويستولى على أجزاء واسعة
منها . وفرض نابليون غرامة على كل ألمانى لدعم الجيش الفرنسى ،
وكان على جاوس أن يدفع ٢٠٠٠ فرنك وهو ما لا يستطيعه خصوصا
بعد هزيمة راعيه . وحاول لابلاس أن يدفع المبلغ نيابة عن جاوس
لكن هذا رفض وقام بسداد المبلغ . وبعد ذلك قام معجب مجهول
فى فرانكفورت بسداد المبلغ نيابة عن جاوس وإضطر للقبول .

ويعتبر العام ١٨١١ نقطة تحول في مسار جاوس العلمى . فقط حقق جاوس إكتشافا جديدا أسر به إلى بسل Bessel يتعلق بالدوال التحليلية ذات المتغير المركب .

ففى رسالة جاوس إلى بسل يقول إنه إكتشف "النظرية الأساسية فى هذا الميدان الواسع من ميدان الدوال المركبة" ، وهى النظرية التى إكتشفها أيضا كل من كوشى ونيشتراس بشكل مستقل ، وتنص على أنه إذا كانت الدالة $f(z)$ منتظمة على كل نقطة على وداخل المنحنى المغلق C وكانت $f(z)$ متصلة على كل نقطة على وداخل C فإن $\int_C f(z) dz = 0$ ، وكانت هذه النظرية هى فاتحة علم جديد هو علم نظرية المتغير المركب .

وفى عام ١٨١٢ نشر جاوس واحدا من أعظم أعماله عن المتسلسلة فوق الهندسية Hppergeometric series وهى

$$y = 1 + \frac{ab}{1!c}x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2!c(c+1)}x^2 + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(cb+2)}{3!c(c+1)(c+2)}x^3 + \dots$$

هذا البحث كان علامة فارقه ، وفيه يحدد جاوس القيود التى ينبغى فرضها على الأعداد a, b, c حتى تتقارب المتسلسلة . وأهمية هذه المتسلسلة أنها تتضمن العديد من المتسلسلات الهامة المعروفة عندما تأخذ a, b, c قيما مميزة مثلا الدالة اللوغاريتمية والدوال المثلثة

وغيرهما من الدوال التي تظهر بكثرة في الفلك والطبيعة النظرية ، وكذلك متسلسلة ذات الحدين هي حالة خاصة من هذه المتسلسلة العامة . مثل حالة $b = c$ تعطينا $y = (1-x)^{-a}$ ، وحالة $c = 2, a = b = 1$ تعطينا $y = \frac{1}{n} \log(1-x)^{-1}$ وهكذا .

وقد بدأ جاوس في أواخر حياته يشكو من تضخم القلب وإنهاك النفس ، ثم إخذت تظهر عليه علامات "الإستسقاء" ومات في فبراير سنة ١٨٥٥ في الثامنة والسبعين من العمر .

ملاحظات أخيرة :

(١) دالة الخطأ (التوزيع الطبيعي القياسى) هي

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad -\infty < x < \infty$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \quad \text{حيث}$$

(٢) المعادلة التفاضلية فوق الهندسية هي

$$x(1-x) y'' + \{ \gamma - (\alpha + \beta + 1) x \} y' - \alpha \beta y = 0$$

ولها حل الذى يعطى المتسلسلة فوق الهندسية

$$y = 1 + \frac{\alpha\beta}{1.\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\gamma(\gamma+1)}x^2 + \dots \infty$$

(٣) النظرية الأساسية لعلم الجبر لها صورتان

(أ) كل معادلة جبرية لها جذر .

(ب) كثيرة الحدود .

$$a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_m$$

لها بالضبط m من الجذور داخل الدائرة $|z| = R$ باختيار

R كبيرة كبرا كافيا .

ونبرهن هذه النظرية اليوم باستعمال نظرية روشي

Rouche' للمتغير المركب التي تنص على أنه إذا كانت

$f(z)$, $q(z)$ منتظمتين على وداخل منحنى مغلق C وكان

$$|g(z)| < |f(z)|$$

على نقط المنحنى C فإن $f(z)$, $f(z) + g(z)$

لهما نفس عدد الجذور داخل C

هنرى بوانكريه (١٨٥٤ - ١٩١٢) آخر التجميعيين

من النادر أن تجد رياضيا له المعرفة الواسعة بكل فروع الرياضيات فى عصره مثل بوانكريه ، ومن الأندر أن تجد رياضيا له الإلمام العريض بالفلسفه العلميه مثل بوانكيره . كما أن من النادر أن تجد رياضيا له هذا الأسلوب المتميز والعرض الواضح فى كتاباته ، حتى أن الأكاديمية الأدبية فى فرنسا منحته شرف العضوية بها ، وهو أمر يندر أن يحدث بين العلماء . والسبب هو أسلوبه الممتاز فى كتاباته العلميه الشعبيه الموجهه لغير المتخصصين .

ولد هنرى بوانكيره عام ١٨٥٤ من عائلة ميسورة وكان والده إستاذا بكلية الطب ، وكان ابن عمه ريموند يدرس القانون واشتغل بالسياسة حتى وصل إلى أن يكون رئيس جمهوريه فرنسا خلال الحرب العالميه الأولى . ولم يكن لدى هنرى إهتمام لا بالإدارة ولا الأمل فى المناصب الكبرى . وبسبب عناية أمه المستمره به كان تلميذا متفوقا فى صغره .

لكنه فى سن الخامسة إصيب بالدفترى ، وأدى هذا إلى شلل فى حنجرتة دام تسعة شهور . وبالطبع أثر هذا المرض عليه وجعله طفلا ضعيفا وخجولا ، لكنه دفعه أيضا إلى الإعتماد على موارده الداخليه وبدلا من اللعب مع الأطفال أدمن القراءة منذ الصغر . وبسبب هذا

المرض أيضا لم يكن بوانكيره قادرا على إستخدام أصابعه بمهارة ، ولذا كره الدروس العملية خلال دراسته بعد ذلك .

ولو كان لبوانكيره نفس القدرات فى البحوث العملية التى أظهرها فى البحوث النظرية ، لكان الرابع على القمة إلى جانب الثلاثة العظام: أرشميدس ونيوتن وجاوس .

كان أداء بوانكيره فى المدرسة الابتدائية رائعا ، وإن كان حتى ذلك السن لم يظهر إهتماما خاصا بالرياضيات ، وإنما كان ولعه بالتاريخ الطبيعى وعلوم الحيوان ، ولم يظهر ولعه بالرياضيات إلا فى فترة البلوغ (حوالى ١٥ سنة) أو قبل ذلك بقليل . ومنذ أول لحظة بدت له خصوصية نادرة طول حياته . فالرياضيات تتم فى ذهنه بينما هو يتريض بنشاط ، ولا يبدأ الكتابه على الورق إلا عندما يكون كل شئ قد حل فى ذهنه تماما . وفى فترة تاليه من حياته كان يكتب مذكراته الرياضية دفعة واحدة دون مراجعة لما كتب .

فى عام ١٨٧١ (وكانت الحرب بين فرنسا وبروسيا على أشدها) حصل وهو فى سن السابعة عشر على أول درجة فى الآداب والعلوم ، ثم تقدم لإمتحان القبول بمدرسة الغابات فأدهش زملائه بحصوله على الجائزة الأولى فى الرياضيات دون أن يكون قد إهتم بكتابة محاضرات الأساتذه .

وفى نهاية السنة الأولى إنتقل إلى مدرسة البوليتكنيك Ecole Polytechnique وأظهر مقدره فائقة فى الإجابة على أسئلة

إمتحان القبول وفي هذه المدرسة تميز بوانكيره بتفوق في الرياضيات وبعبزه الفاضح في التدريب البدني والعسكري الذي كان سائدا بالمدرسة ، وبضعفه الواضح في مادة الرسم . وعندما أنهى الدراسة بالبوليتكنيك عام ١٨٢٥ دخل مدرسة المناجم بهدف أن يكون مهندس مناجم ، لكنه بعد ثلاث سنوات قدم لكلية العلوم في باريس رسالة في المعادلات التفاضلية للحصول على الدكتوراه في العلوم الرياضية . وقد قال الاستاذ داربو الذي كلف بفحص الرسالة أنها رسالة غير عادية ، لكن هناك نقاط تحتاج إلى تصحيح أو شرح . ذلك أن بوانكيره كان في عمله حدسيا ولم يكن يهتم بمراجعة أى عمل يقوم به .

وفي أواخر عام ١٨٢٩ حصل بوانكيره على أول وظيفة أكاديمية كأستاذ للتحليل الرياضى في جامعة كين . وبعد سنتين (وكان عمره ٢٢ سنة) رقى إلى وظيفة الأستاذية في جامعة باريس . ومنذ تلك اللحظة حتى وفاته قدم بوانكيره ٥٠٠ بحثا علميا في رياضيات جديدة ، وألف أكثر من ثلاثين كتابا تغطى عمليا كل فروع الرياضيات والفيزياء النظرية والفلك النظرى . هذا غير كتبه الكلاسيكية عن فلسفة العلم وكتاباته العلمية الشعبية .

ولقد كانت أول نجاحات بوانكيره في المعادلات التفاضلية ، التى كانت آنذاك شديدة الأهمية في الفيزياء النظرية والفلك النظرى . وقد أدت نجاحاته هذه عام ١٨٨٠ عندما كان هو فى السادسة والعشرين إلى واحدة من أعظم إكتشافاته ، وهى تعميم للدوال الناقصية *Elleptic*

functions التي هي تعميم للدوال المثلثية (الجيب ، وجيب التمام) .
 فللدوال الثلاثية (جا ، جتا) دورة مقدارها ٢ ط ، أى أن الدالة تعود
 إلى قيمتها بعد فترة ٢ ط . أى أن جا (ع + ٢ط) = جا ع وفى
 الدالة الناقصية ق (س) تكون هناك دورتان متميزتان م_١ ، م_٢ بحيث

$$ق (ع + م_١) = ق (ع) ، \quad ن (ع + م_٢) = ق (ع)$$

وجد بوانكيره أن هذه الدورية Periodicity ليست إلا حالة خاصة
 لصفة أكثر عمومية: فقيمة بعض الدوال تعود إلى أصلها عندما يستبدل
 المتغير ع بأى واحد من عدد لا نهائى (وإن كان قابلا للعدد) من
 التحويلات الكسرية Fractional Transformations وأن كل هذه
 التحويلات تكون زمرة group .

وللتوضيح :

نستبدل ع ب $\frac{اع + ب}{ج ع + د}$. اكتشف بوانكيره أنه لعدد لا نهائى من
 مجموعة قيم ا ، ب ، ج ، د هناك دوال مثل ل (ع) بحيث أن ل

$$ل (ع) = \left(\frac{اع + ب}{ج ع + د} \right)$$

والأكثر من ذلك أنه إذا كانت ا ، ب ، ج ، د_١ ، ا_١ ،
 ب_٢ ، ج_٢ ، د_٢ هما أى مجموعتين من قيم ا ، ب ، ج ، د . وإذا غيرت

ع ب $\frac{1^{\circ}ع + 1^{\circ}ب}{1^{\circ}ج + 1^{\circ}د}$ ، ثم فى هذه التحويلات غيرت ع إلى

$\frac{2^{\circ}ع + 2^{\circ}ب}{2^{\circ}ج + 2^{\circ}د}$ للحصول على $\frac{2^{\circ}ع + 2^{\circ}ب}{2^{\circ}ج + 2^{\circ}د}$ فإننا نحصل ليس فقط على

$$ل = \left(\frac{1^{\circ}ع + 1^{\circ}ب}{1^{\circ}ج + 1^{\circ}د} \right) ل (ع) , \quad ل = \left(\frac{2^{\circ}ع + 2^{\circ}ب}{2^{\circ}ج + 2^{\circ}د} \right) ل (ع)$$

بل نجد أيضا أن

$$ل = \left(\frac{2^{\circ}ع + 2^{\circ}ب}{2^{\circ}ج + 2^{\circ}د} \right) ل (ع)$$

والأكثر من هذا أن مجموعة التعويضات

$$ع \leftarrow \frac{1^{\circ}ع + 1^{\circ}ب}{1^{\circ}ج + 1^{\circ}د} \quad (\text{السهم يعنى غيرت إلى})$$

التي لا تغير قيمة الدالة ل (ع) تكون زمرة group .
وباختصار نقول : الدالة ل (ع) هى دالة غير متغيرة invariant تحت
تأثير زمرة لا نهاية العدد (وإن كانت قابلة للعد) من التحويلات
الكسرية الخطية .

$F(z)$ is invariant under an infinite group of linear fractional transformations

والدوال التي لها هذه الخاصية تسمى (ذاتية التشكل) automorphic functions .
وقد نجح بوانكاريه فى سلسلة من البحوث فى تركيب هذه
الدوال وتطوير أهم خواصها .

ويلزم هنا إبراز ملاحظتين هامتين لتوضيح أهمية إكتشافات
بوانكريه:

الأولى: هي أن بوانكريه قد أثبت لأول مره أن الدوال الناقصية
هي حالة خاصة من نظرية عامه .

والثانية: هي ما قاله الرياضى الفرنسى هامبير Humbert عندما ذكر
أن بوانكريه بتقريريه (التاليين) قد أعطانا مفاتيح عالم الجبر
Algebraic Cosmos . وهذان التقريران ينصان على :

(١) كل دالتين أوتومورفيك غير متغيرتين تحت نفس
المجموعة تربطهما معادلة جبرية .

(٢) وبالعكس فإن إحداثيات أى نقطة على منحنى
جبرى يمكن التعبير عنها بدلالة دوال أوتومورفيك
وبالتالى دوال منتظمة (غير متغيرة) ذات معلمة
(بارامتر) واحدة .

للتوضيح المنحنى الجبرى هو المنحنى الذى . معادلة
ق (س ، ص) = ٠ حيث ق (س ، ص) كثيرة حدود فى س ، ص مثلا
معادلة الدائرة التى مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها أ هي
$$س^2 + ص^2 = أ^2$$

وحسب مفاتيح بوانكريه لابد أن يكون من الممكن التعبير عن س ،
ص كدالتين أوتومورفينيه بدلالة بارامتر واحد .

وهذا صحيح فالتعبير هو $s = a \sin \theta$ ، $v = a \cos \theta$.
وبالترييع : نجد $s' = v' + v = a'$. ولكن الدوال المثلثية هي حالة
خاصة من الدوال الناقصية التي هي بدورها من الدوال
الأوتومورفيك ، إن إبتكار هذه النظرية الضخمة عن الدوال
الأوتومورفيك هو واحد من أعمال مدهشة كثيرة إكتشفها بوانكاريه
قبل بلوغه سن الثلاثين .

وفي سن الثانية والثلاثين إنتخب بوانكاريه عضوا في الأكاديمية
الفرنسية ، وقد تحول بوانكاريه من قضايا الرياضة البحتة إلى قضايا
الفلك النظرية . فمند زمن نيوتن كانت هناك مسائل عديدة في
الفلك الرياضي لم تحل وحتى أواخر القرن التاسع عشر لم تكن
الأسلحة المستخدمة في معالجة هذه المسائل إلا تحسينا لما وصل
إليه نيوتن . لكن خلال القرن التاسع عشر تطورت العديد من فروع
البحث خصوصا نظرية الدوال المركبة والسلاسل اللانهائية ولذا إتجه
بوانكاريه إلى معالجة قضايا الفلك الرياضي مستخدما هذه الأسلحة
الجديدة . ولذا عالج المسألة التالية : نتصور ن من الأجسام موزعة
في الفضاء بأي طريقة حيث الكتل معلومة والمسافات البينية معلومة .
إذن تتجاذب هذه الأجسام وفق قانون نيوتن في الجاذبية . والآن
إذا إستبدلنا هذه الأجسام بكواكب فالسؤال : كيف تصبح حركة
السموات بعد سنه أو بعد بليون سنه ؟

بالطبع هناك تغيرات لم يأخذها الرياضيون في حساباتهم مثل الإشعاع وأن كتل الكواكب لا تظل ثابتة على مر السنين . لكن حل المشكلة لن من الأجسام قد يعطينا إجابة كافية في الظروف الحاضرة . لاحظ أن حالة $n = 3$ هي أهم حالة بالنسبة لنا باعتبار أن الأجسام الثلاثة هي الشمس والأرض والقمر .

لقد أعلن ملك السويد عن جائزة كبرى في عام ١٨٨٢ لحل هذه المسألة . وتقدم بوانكاريه للحصول على الجائزة . ورغم أن بحوثه لا تمثل حلاً كاملاً للمسألة لكنه فتح ببحوثه فصلاً جديداً في علم الميكانيكا السماوية . ولهذا منح الجائزة .

خلال العقد الأول من القرن العشرين تزايدت شهرة بوانكاريه ، بحيث أصبح ينظر إليه كأهم رياضي في العالم في زمنه .

وكان بوانكاريه من أشد المعارضين لفكرة أن كل الرياضيات يمكن إعادة كتابتها بدلالة الأفكار البسيطة للمنطق (رسل) . ففي رأى بوانكاريه هناك شئ في الرياضيات أكثر من المنطق هو الذي يجعلها كما هي معروفة . وربما كان يعتقد مثل المدرسة الحدسية أن الرياضيات سابقة على المنطق . وإذا كان لابد أكثر من اشتقاق واحد من الآخر فإن المنطق هو الذي لابد أن يشتق من الرياضيات لا العكس .

فى عام ١٩٠٦ (وعمره ٥٢ سنة) حصل بوانكريه على أعلى مركز علمى فى فرنسا : رئاسة الأكاديمية . وهذا المنصب لم يضمم غروره بل على العكس ظل بوانكريه شديد التواضع .

وكان بوانكريه سعيدا فى زواجه ، أنجب ولدا وثلاث بنات ، وكان من عشاق الموسيقى السيمفونية .

وفى المؤتمر الرياضى الدولى المنعقد عام ١٩٠٨ فى روما منعه المرض من قراءة بحثه عن " مستقبل الفيزياء الرياضية " ، وقد أجريت له عملية جراحية وظن أنه شفى تماما . لكن فى ربيع ١٩١٢ أجريت له عملية أخرى ، لكنه مات فجأة ، وكان فى التاسعة والخمسين وفى أوج قدراته العلمية .

ملحوظة أخيرة :

مسألة $n = 3$ عندما تصاغ رياضيا تنتهى فى التحليل الأخير إلى مسألة حل تسع معادلات تفاضلية آنية (كلها خطية من الدرجة الثانية). وكما هو الحال فى معظم المسائل الفيزيائية فإنه لايتوقع أن يكون الحل على هيئة حدود محدودة . وإذا كان هناك حل فعلا لهذه المسألة فلا بد أن يكون على هيئة سلسلة لانهائية .

صفحة	المحتويات
٥	تقديم
٧	مقدمة
١٩	إطالة عامة
٣١	تابع إطالة عامة
٤٣	رياضة الحضارتين الفرعونية والبابلية
٤٩	الرياضيات فى الحضارة اليونانية
٦١	متحف الإسكندرية أو (مدرسة الإسكندرية)
٧٣	رياضيات الحضارة العربية الإسلامية
٨٣	الخوارزمى
٩٠	عمر الخيام
١٠٩	ابن الهيثم
١١٣	جمنيد الكاشى
١٢٧	أبو الكامل وعلم الجبر
١٣٥	عصر النهضة الأوربية ومعادلات الدرجة الثالثة
١٥١	إسحاق نيوتن
١٦٣	كارل فريدريك جاوس
١٧٩	هنرى بوانكاريه



تتعاظم في العصر الحديث أهمية علم الرياضيات
الذي أصبح يدخل حياتنا من أوسع الأبواب .
وهذا الكتاب كما يقول مؤلفه العالم البارز في مادة
الرياضيات والذي يتمتع بثقافات واسعة في مجالات
شتى ، جعلته من أبرز شخصيات العصر ، يقول في
مقدمة هذا الكتاب « مقدمة في تاريخ الرياضيات » :
(كثيرا ما تقدم الرياضيات كعلم نشأ في برج عاجي لا
صلة له بالحياة العملية وبالنشاط الانتاجي للإنسان ،
على أن هذه النظرة للرياضيات زائفة ولا يدعمها
تاريخ الرياضيات . ومن المؤكد أن دراسة تاريخ
العلوم والحضارة يوضح أن ازدهار الحضارات
ارتبط به ازدهار العلوم الرياضية ... إلخ) .

الناشر



دار المستقبل العربي